

Hans Walser, [20180723]

Zwölfeck und Quadrat

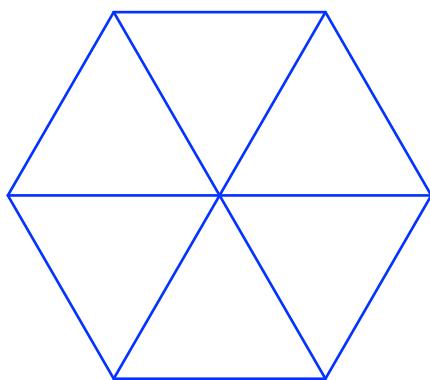
1 Worum geht es?

Ein Problem zur Zerlegungsgleichheit.

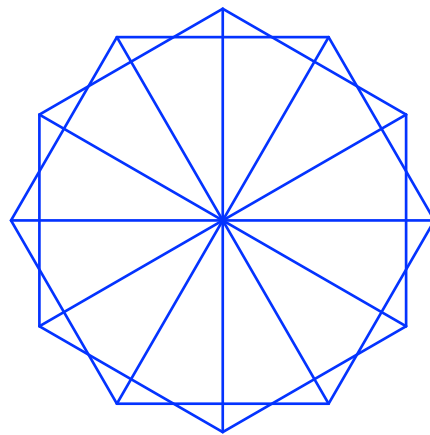
Weitere Beispiele zu dieser Thematik siehe [\[1\]](#), [\[2\]](#), [\[3\]](#), [\[4\]](#).

2 Basisfigur

Mit sechs regelmäßigen Dreiecken zeichnen wir ein Sechseck (Abb. 1a). Dieses überlagern wir mit einer um 30° verdrehten Kopie (Abb. 1b).



a)



b)

Abb. 1: Dreiecke als Basisfigur

3 Zwölfeck und Quadrat

Die konvexe Hülle der Figur der Abbildung 1b ist ein regelmäßiges Zwölfeck (Abb. 2a). Weiter können wir in die Figur ein Quadrat einpassen (Abb. 2b).

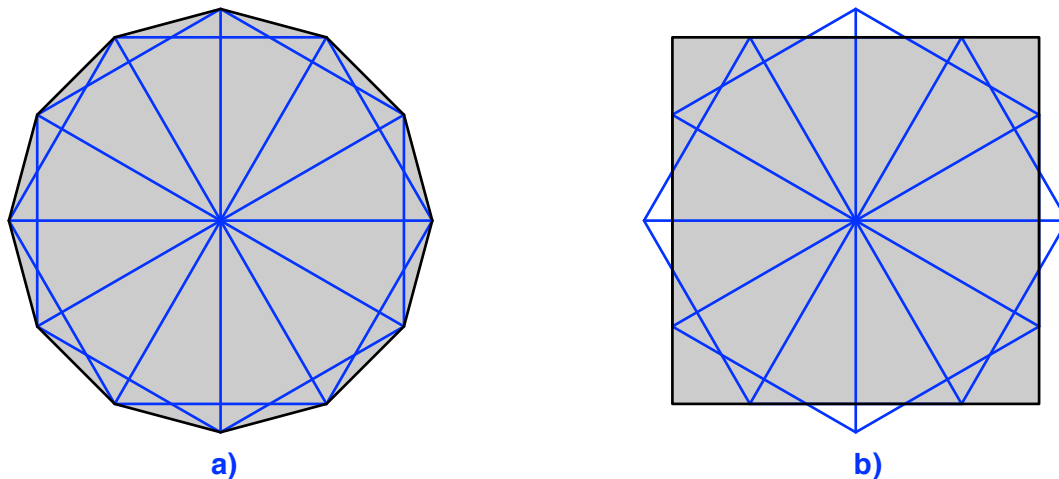


Abb. 2: Zwölfeck und Quadrat

Sind das Zwölfeck und das Quadrat flächengleich?

4 Flächenberechnungen

Für die Flächenberechnungen setzen wir die Seitenlänge der regelmäßigen Dreiecke 1. Das Zwölfeck besteht aus zwölf gleichschenkligen Dreiecken der Schenkellänge 1 und dem Spitzenwinkel 30° . Daraus ergibt sich der Flächeninhalt $A_{12\text{-Eck}}$:

$$A_{12\text{-Eck}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{\sin(30^\circ)}_{\frac{1}{2}} = 3 \quad (1)$$

Das Quadrat hat die Seitenlänge $\sqrt{3}$ und damit ebenfalls den Flächeninhalt 3. Die beiden Figuren sind also flächengleich.

5 Zerlegungsgleichheit

Nach einem Satz von Hilbert sind flächengleiche Polygone in der Ebene auch zerlegungsgleich.

Die Abbildung 3 zeigt eine gemeinsame Zerlegung.

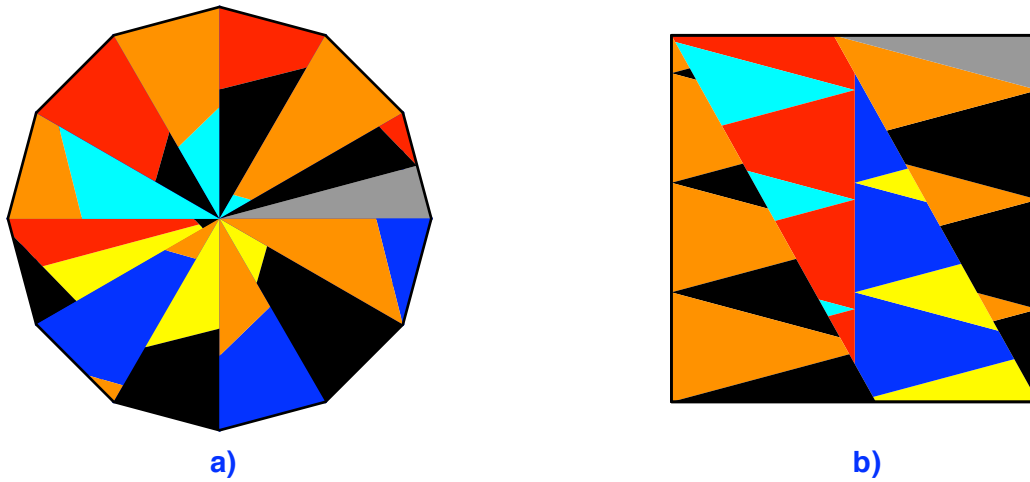


Abb. 3: Gemeinsame Zerlegung

Die Abbildung 4 gibt eine Zwischenfigur. Wir erkennen in der Zwischenfigur einerseits die gleichschenkligen Dreiecke, aus denen das Zwölfeck zusammengesetzt ist, andererseits ist auch angegeben, wie wir von dieser Zwischenfigur auf das Quadrat kommen.

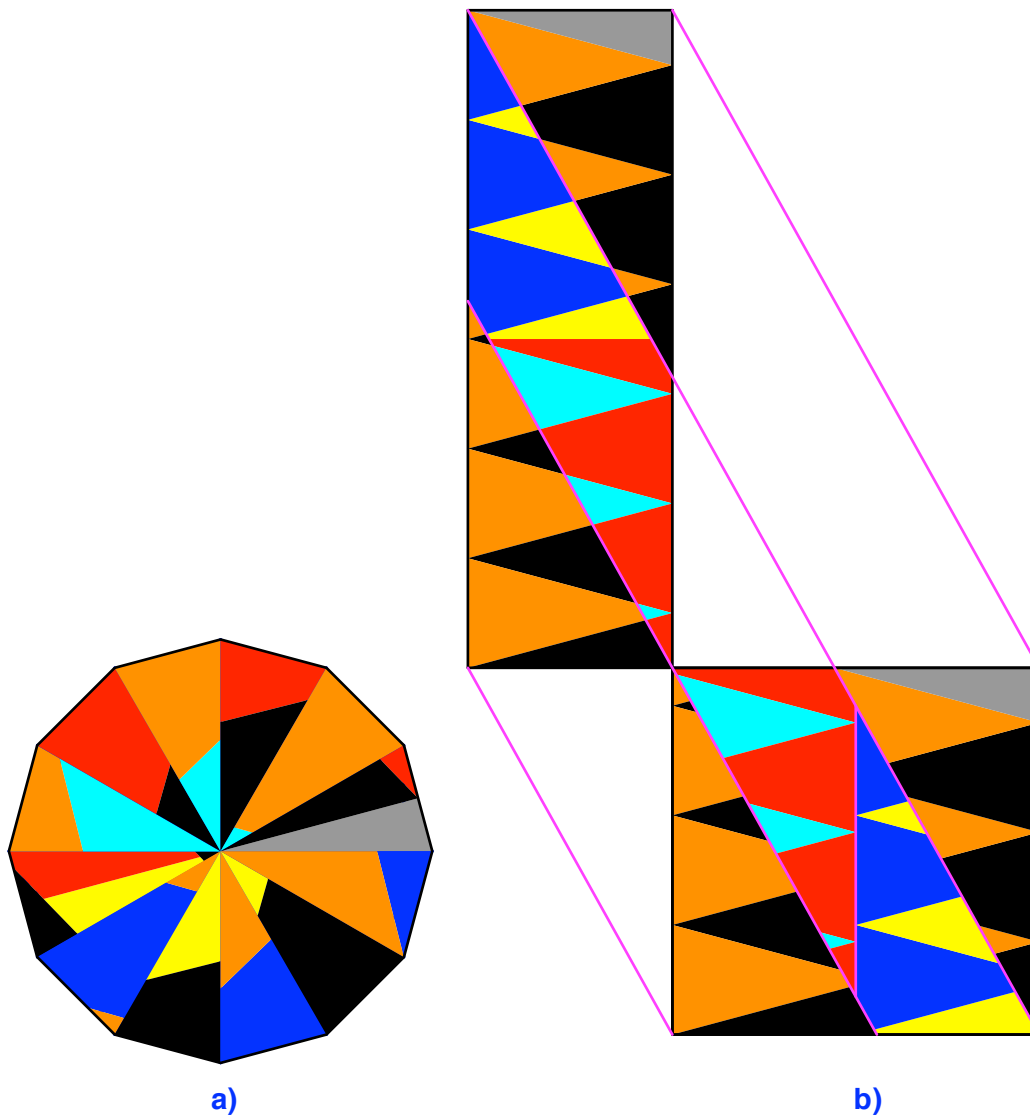


Abb. 4: Zwischenfigur

Gibt es eine elegantere Lösung?

Websites

[1] Hans Walser: Zwölfeck (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfeck/Zwoelfeck.htm

[2] Hans Walser: Zwölfeck 2 (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfeck2/Zwoelfeck2.htm

[3] Hans Walser: Zwölfecksfläche (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfecksflaeche/Zwoelfecksflaeche.htm

[4] Hans Walser: Zwölfeck und Rechteck (abgerufen 20.07.2018):

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Z/Zwoelfeck_u_Rechteck/Zwoelfeck_u_Rechteck.htm