

Hans Walser, [20180925]

Zwei Folgen

1 Worum geht es?

Zwei gekoppelte Folgen von Rechtecken und zugehörige Zahlenfolgen.

2 Flächengleiche Rechtecke anfügen

Die Abbildung 1 zeigt die Entstehung einer Doppelfolge von flächengleichen Rechtecken. Die beiden ersten Rechtecke sind Quadrate.

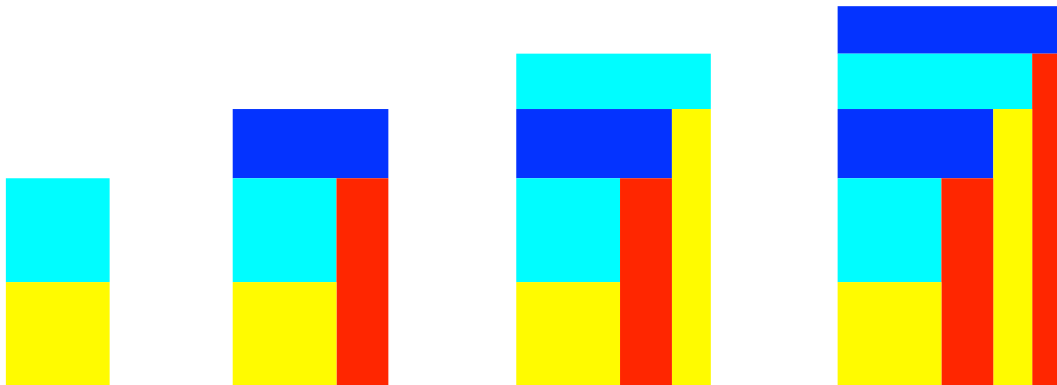


Abb. 1: Folgen flächengleicher Rechtecke

Die Abbildung 2 zeigt ein ausführlicheres Beispiel.

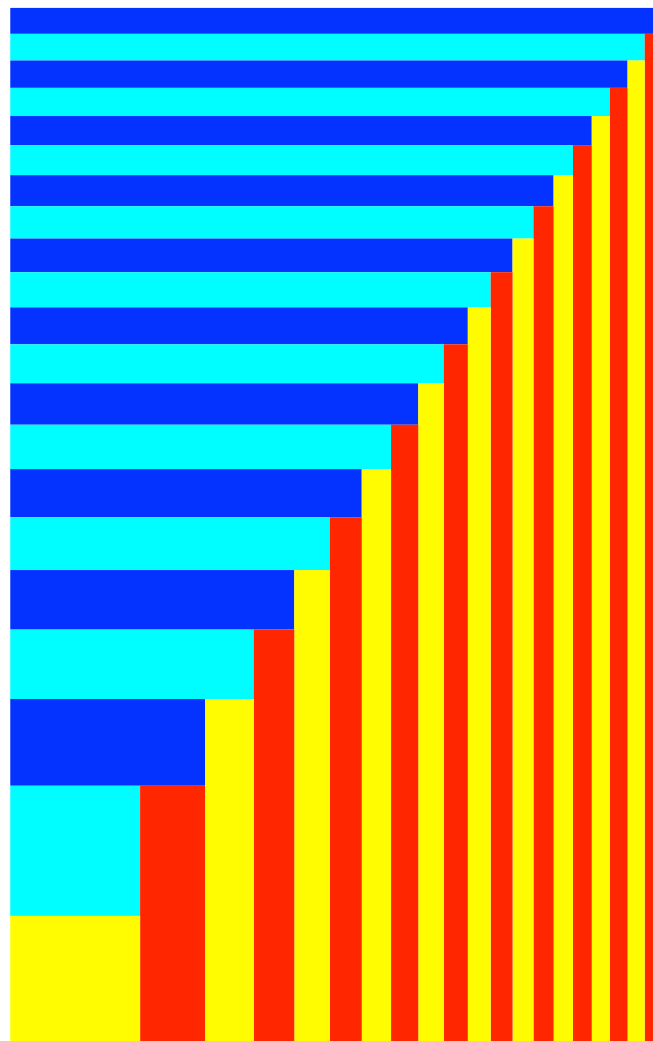


Abb. 2: Ausführliches Beispiel

3 Zahlenfolgen

Der Figur ordnen wir zwei Zahlenfolgen x_n und y_n zu gemäß Abbildung 3. Dabei verwenden wir die Startwerte:

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2 \quad (1)$$

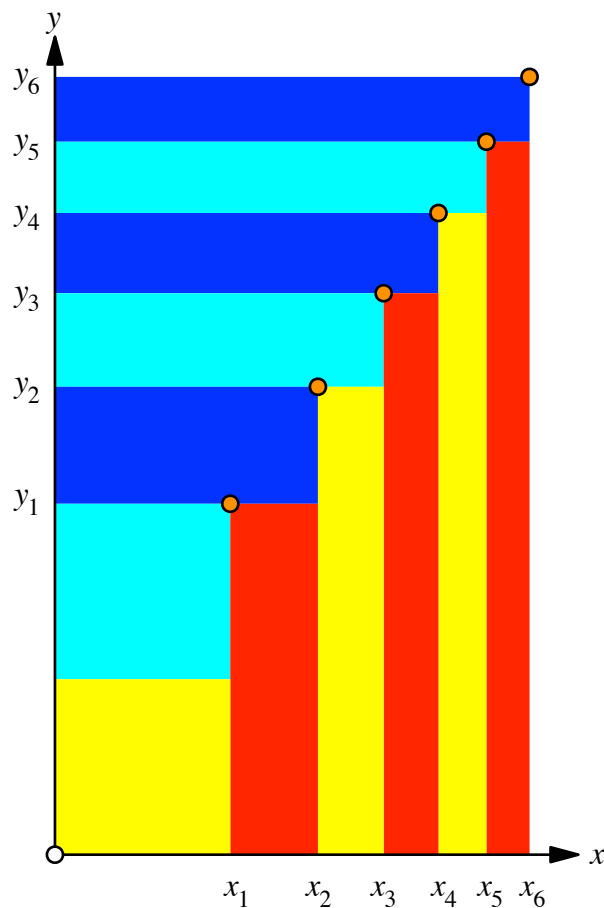


Abb. 3: Zahlenfolgen

Aus der Bedingung der Flächengleichheit (alle Rechtecke haben den Flächeninhalt 1) folgt:

$$(x_{n+1} - x_n)y_n = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n} \quad (2)$$

Analog:

$$(y_{n+1} - y_n)x_{n+1} = 1 \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \frac{1}{x_{n+1}} \quad (3)$$

Man beachte die Asymmetrie der Indizes zwischen (2) und (3).

Die zusammengesetzten Rechtecke mit der linken unteren Ecke im Ursprung $(0,0)$ und der rechten oberen Ecke im Punkt mit den Koordinaten (x_n, y_n) enthalten $2n$ Rechtecke mit dem Flächeninhalt 1 und haben somit den Flächeninhalt $2n$. Daher ist:

$$x_n y_n = 2n \Rightarrow y_n = \frac{2n}{x_n} \quad (4)$$

Damit können wir y_n in (2) eliminieren und erhalten die Rekursion:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n} = x_n \left(1 + \frac{1}{x_n^2}\right) \quad (5)$$

Mit dem Startwert $x_1 = 1$ ergibt sich:

$$x_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) \quad (6)$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte, wie sie aus dem Computer kommen.

n	x_n
1	1
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{15}{8}$
4	$\frac{70}{32}$
5	$\frac{315}{128}$
6	$\frac{1386}{512}$

Tab. 1: Werte

4 Analyse der Zahlenfolge

Leider wird man in der Schule angehalten, Brüche vollständig zu kürzen. Dies ist nicht immer sinnvoll. Die Tabelle 2 enthält dieselben Werte wie die Tabelle 1, aber in zusätzlichen Spalten teilweise weniger gekürzt und faktorisiert.

n	x_n	x_n	x_n
1	1	$1 \cdot \frac{1}{1}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
2	$\frac{3}{2}$	$3 \cdot \frac{2}{4}$	$1 \cdot \frac{3}{2}$
3	$\frac{15}{8}$	$10 \cdot \frac{3}{16}$	$3 \cdot \frac{5}{8}$
4	$\frac{70}{32}$	$35 \cdot \frac{4}{64}$	$10 \cdot \frac{7}{32}$
5	$\frac{315}{128}$	$126 \cdot \frac{5}{256}$	$35 \cdot \frac{9}{128}$
6	$\frac{1386}{512}$	$462 \cdot \frac{6}{1024}$	$126 \cdot \frac{11}{512}$

Tab. 2: Werte in anderer Schreibweise

Wir stellen Regelmäßigkeiten fest.

In der zweiten Wertspalte sind die Zähler bei den Brüchen die natürlichen Zahlen n und die Nenner die geometrische Folge $4^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 4^n$.

In der dritten Wertspalte sind die Zähler die ungeraden Zahlen $2n - 1$ und die Nenner die geometrische Folge $2^{2n-3} = \frac{1}{8} \cdot 4^n$.

Und was hat der Zahlenerkennungsdienst zur Zahlenfolge $\frac{1}{2}, 1, 3, 10, 35, 126, 462, \dots$ zu sagen? Diese Zahlen erscheinen in beiden Spalten als Faktoren, allerdings versetzt.

Diese Zahlen, zunächst ohne das führende $\frac{1}{2}$, erscheinen auch im Pascalschen Dreieck der Binomialkoeffizienten (grün unterlegt in Abb. 4).

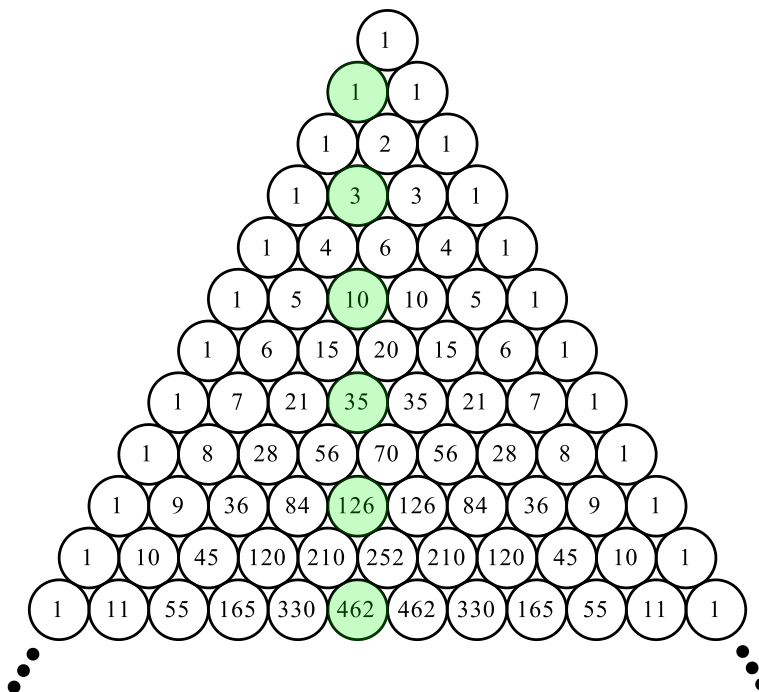


Abb. 4: Binomialkoeffizienten

Somit erhalten wir zwei weitere Darstellungen der Folge x_n :

$$x_n = \frac{n}{4^{n-1}} \binom{2n-1}{n-1} \quad (7)$$

Und:

$$x_n = \frac{2n-1}{2^{2n-3}} \binom{2n-3}{n-2} \tag{8}$$

Die unterschiedliche Indizierung der Binomialkoeffizienten zwischen (7) und (8) rührt von der versetzten Position in der Tabelle 2 her.

Die Formel (8) funktioniert für $n = 1$ zunächst nicht. Wir erhalten den Binomialkoeffizienten $\binom{-1}{-1}$. Um das doch hinzubringen, erweitern wir das Pascalsche Dreieck der Binomialkoeffizienten gemäß Abbildung 5. In den weißen Feldern stehen Nullen. Man beachte, dass die übliche Rekursionsformel für die Binomialkoeffizienten immer noch spielt.

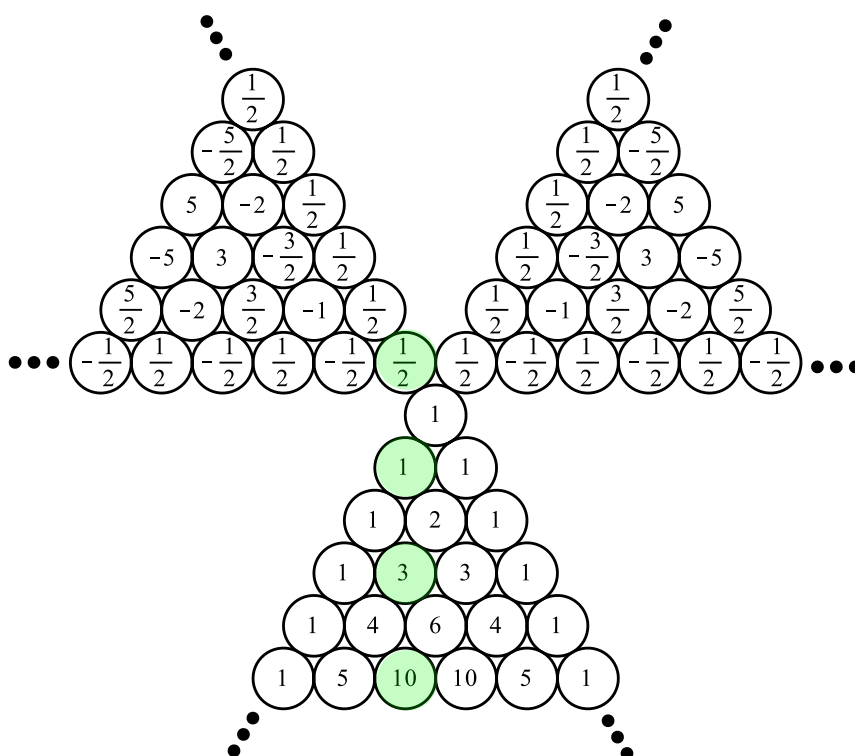


Abb. 5: Binomialkoeffizienten erweitert

Die Formeln (7) und (8) können mit (5) und der Tabelle 2 induktiv bewiesen werden.

5 Grenzform

Die Abbildungen (1) und (2) lassen vermuten, dass die zusammengesetzten Rechtecke mit der linken unteren Ecke im Ursprung $(0,0)$ und der rechten oberen Ecke im Punkt mit den Koordinaten (x_n, y_n) sich einem Rechteck mit konstantem Seitenverhältnis annähert, dass also $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_n} \right)$ konvergiert.

Wegen (4) ist:

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{2n}{x_n^2} \quad (9)$$

Weiter vermuten wir, dass die zusammengesetzten Rechtecke mit der linken unteren Ecke im Ursprung $(0,0)$ und der rechten oberen Ecke im Punkt mit den Koordinaten (x_{n+1}, y_n) sich einem Rechteck mit demselben konstantem Seitenverhältnis annähert, dass also $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_{n+1}} \right)$ konvergiert und denselben Grenzwert hat. Wegen (4) ist:

$$\frac{y_n}{x_{n+1}} = \frac{2n}{x_n x_{n+1}} \quad (10)$$

Die Tabelle 3 zeigt einige numerische Werte.

n	$\frac{y_n}{x_{n+1}}$	$\frac{y_n}{x_n}$
1	1.333333333	2.
10	1.533851903	1.610544498
100	1.566893745	1.574728214
1000	1.570403873	1.571189075
10000	1.570757059	1.570835597
100000	1.570792400	1.570800254

Tab. 3: Numerische Werte

Mit CAS kann gezeigt werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_n}{x_n} \right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.570796327 \quad (10)$$

Die Konvergenz ist recht langsam.

Die Abbildung 6 illustriert den Grenzwert.

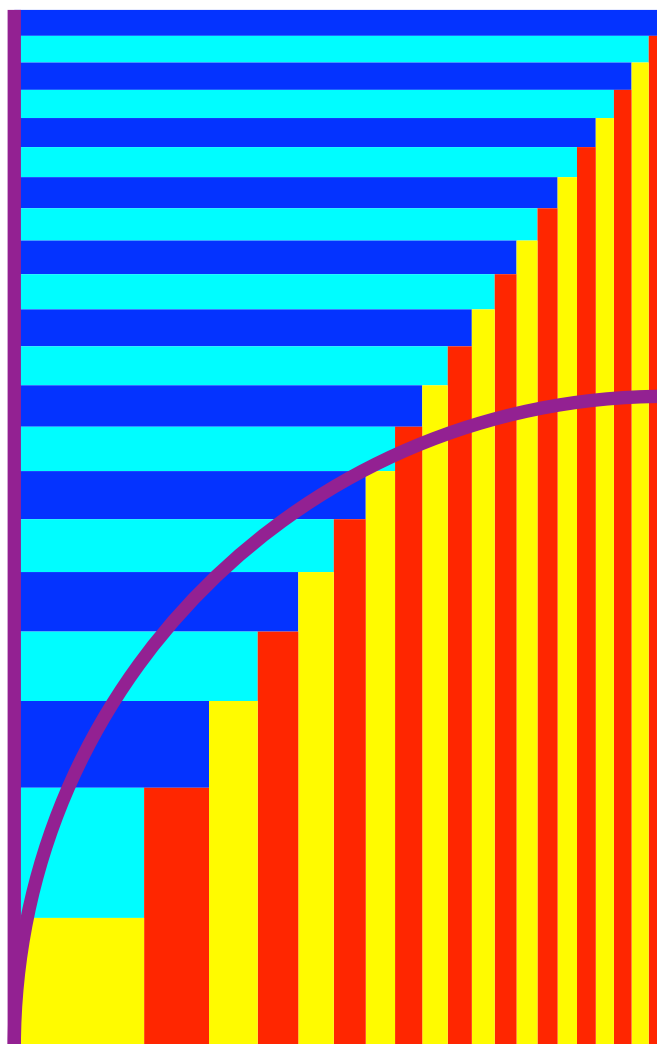


Abb. 6: Approximation des Viertelkreises

6 Die Gamma-Funktion

Die Folge x_n kann auch mit der Gamma-Funktion beschrieben werden.

$$x_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2k}\right) = \frac{2\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)\sqrt{\pi}} = \frac{2\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!\sqrt{\pi}(n-1)!} = \frac{n}{4^{n-1}} \binom{2n-1}{n-1} \quad (11)$$

Wir kommen auf die Formel (7).