Hans Walser, [20150122]

x^y=x*y

Anregung: J. A., B.

1 Worum es geht

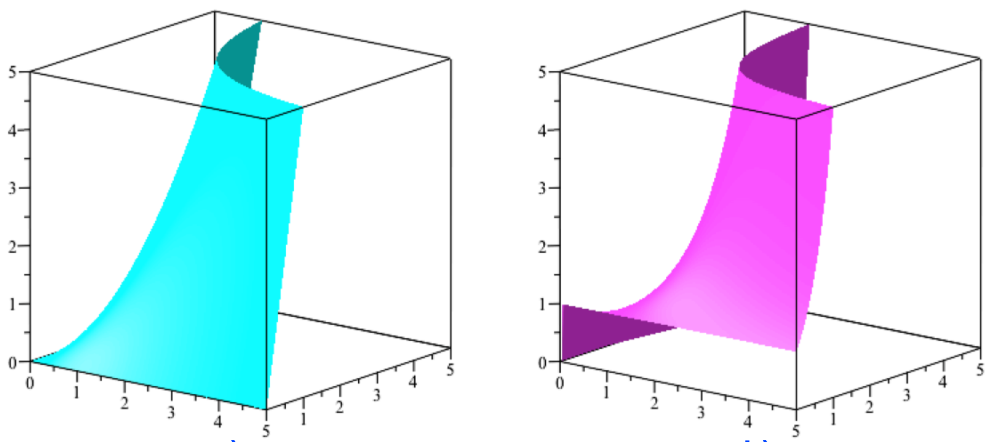
Gesucht sind Lösungen der Gleichung:

$$x^y = xy$$

Triviale Lösungen sind $x = 0, y > 0$ und $x = \text{beliebig}, y = 1$. Eine nichttriviale Lösung ist $x = 2, y = 2$.

2 Flächen im Raum

Die Abbildung 1a zeigt die Fläche $z(x,y) = xy$, die Abbildung 1b die Fläche $z(x,y) = x^y$.



a) b)

Abb. 1: Flächendarstellung

Die Abbildung 2 zeigt die Schnittkurven der beiden Flächen in allgemeiner und spezieller Sicht.

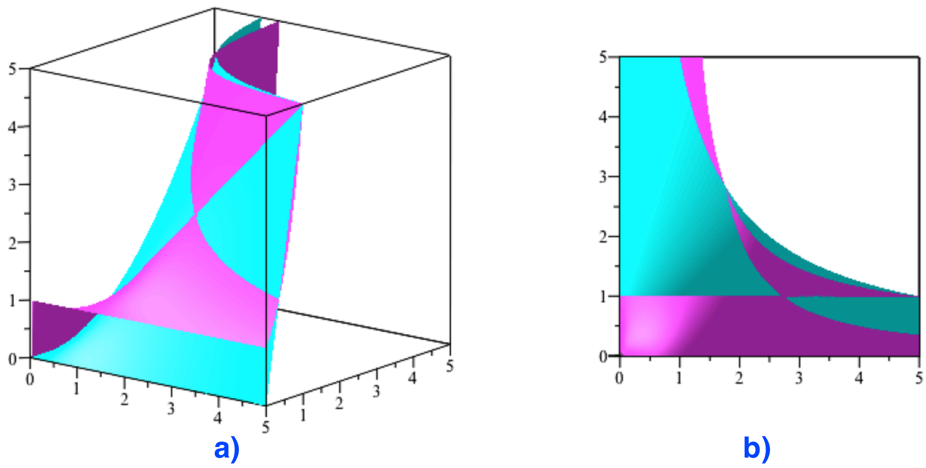


Abb. 2: Schnittkurven

3 Implicitplot

Die Abbildung 3 zeigt einen implicitplot für die Lösungen der Gleichung $x^y = xy$.

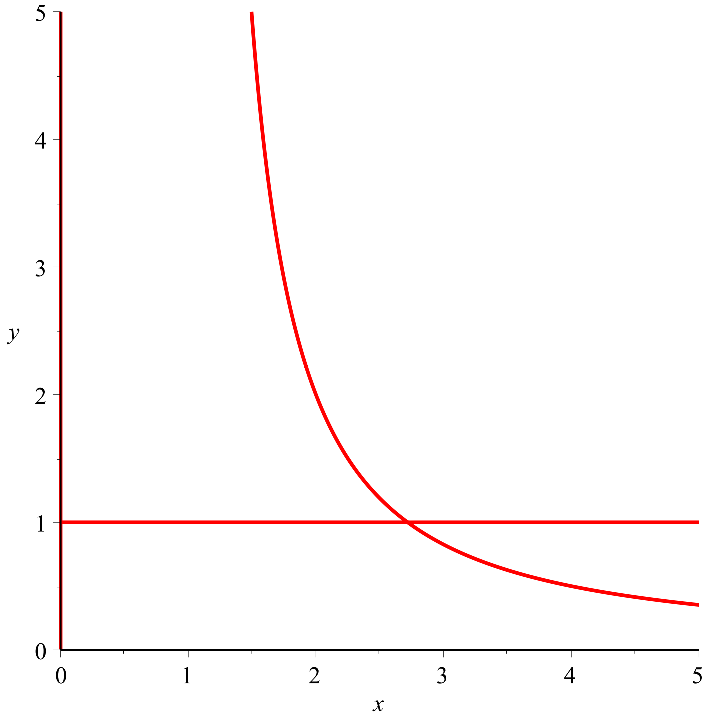


Abb. 3: Implicitplot

Wir sehen die trivialen Lösungen und eine interessante Kurve.

4 Experimentelle Kurvendiskussion

Die Kurve geht durch den Punkt (e, 1) und hat dort die Steigung $-\frac{2}{e}$ (Abb. 4). Ferner hat sie die x-Achse als Asymptote sowie die Gerade $x = 1$. Weiter verläuft sie durch die schon gefundene nichttriviale Lösung (2, 2) sowie durch $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

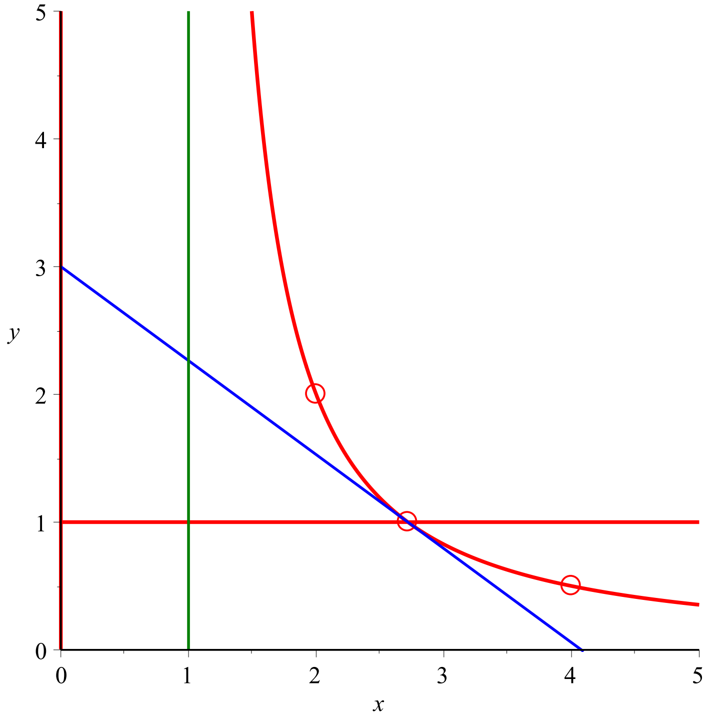


Abb. 4: Experimentelle Kurvendiskussion

5 Analytische Kurvendiskussion

Für die interessante Kurve ist $x \neq 0$. Wir können daher unsere Gleichung $x^y = xy$ umformen wir folgt:

$$
\begin{aligned}
x^y &= xy \\
x^{y-1} &= y \\
x(y) &= y^{\frac{1}{y-1}} = e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)}
\end{aligned}
$$

Damit können wir unsere Kurve als Funktionsgraf einer Funktion von *y* sehen (bisschen ungewohnt, Abb. 5).

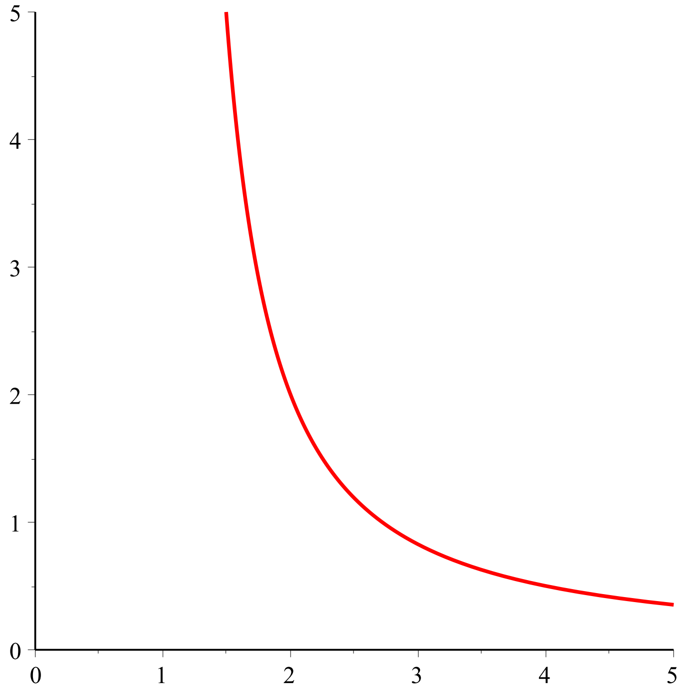


Abb. 5: Die interessante Kurve

Eigentlich ist die Funktion für $y = 1$ nicht definiert. Mit Bernoulli-de l'Hôpital kann die Lücke behoben werden:

$$\lim_{y \to 1} e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)} = e^{\lim\limits_{y \to 1} \frac{1}{y-1}\ln(y)}$$

Nebenrechnung:

$$\lim_{y \to 1} \frac{\ln(y)}{y-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bernoulli-} \\ \text{de l'Hôpital}}}{=} \lim_{y \to 1} \frac{\frac{1}{y}}{1} = 1$$

Somit ist:

$$\lim_{y \to 1} e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)} = e^1 = e$$

Das hatten wir ja auch schon experimentell herausgefunden.

Analog können wir die Steigung in diesem Punkt berechnen. Zunächst ist (wir müssen nach *y* ableiten):

$$\frac{dx}{dy} = e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)}\left(\frac{-1}{(y-1)^2}\ln(y) + \frac{1}{y-1}\frac{1}{y}\right)$$
$$= e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)}\left(\frac{-\ln(y)y+(y-1)}{(y-1)^2 y}\right) = e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)}\left(\frac{-\ln(y)y+(y-1)}{y^3-2y^2+y}\right)$$

Weiter ist:

$$\lim_{y\to1}\frac{dx}{dy} = \underbrace{\lim_{y\to1} e^{\frac{1}{y-1}\ln(y)}}_{=e}\lim_{y\to1}\frac{-\ln(y)y+(y-1)}{y^3-2y^2+y}$$

Nebenrechnung:

$$\lim_{y\to1}\frac{-\ln(y)y+(y-1)}{y^3-2y^2+y} = \lim_{y\to1}\frac{-\ln(y)-\frac{1}{y}y+1}{3y^2-4y+1} = \lim_{y\to1}\frac{-\ln(y)}{3y^2-4y+1} = \lim_{y\to1}\frac{-\frac{1}{y}}{6y-4} = -\frac{1}{2}$$

Daher:

$$\lim_{y\to1}\frac{dx}{dy} = e\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$$

Das ist der Kehrwert von unserem experimentell gefundenen Wert. Das muss aber so sein, weil nun die Steigung auf die *y*-Achse bezogen ist.

Die Abbildung 6 zeigt die Situation im Einheitsraster. Zusätzlich ist noch der Funktionsgraf des natürlichen Logarithmus eingetragen.

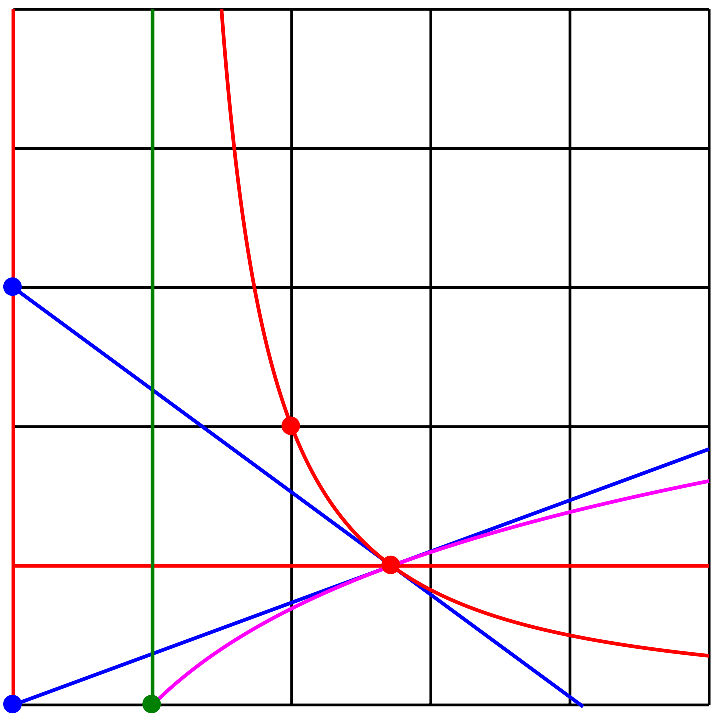


Abb. 6: Im Einheitsraster