

Hans Walser, [20190130]

## Wurzel-2-Dreieck

Anregung: [Horst Steibl](#), Braunschweig

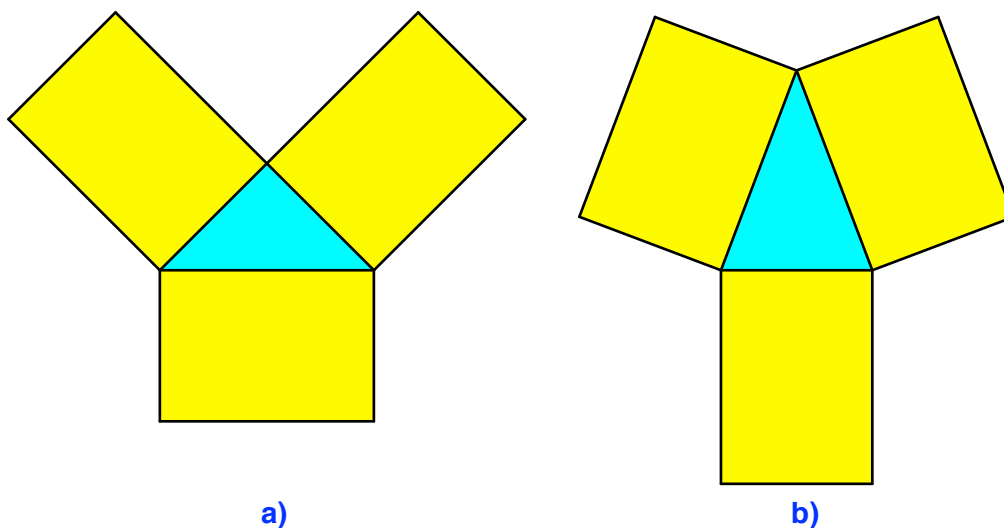
### 1 Worum geht es?

Das rechtwinklig gleichschenklige Dreieck (Abb. 1a) hat das Seitenverhältnis  $1:1:\sqrt{2}$ . Wir vertauschen nun die beiden Längen und arbeiten mit dem gleichschenkligen Dreieck mit dem Seitenverhältnis  $\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$  (Abb. 1b). Dieses Dreieck nennen wir das *Wurzel-2-Dreieck*.



**Abb. 1: Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck und Wurzel-2-Dreieck**

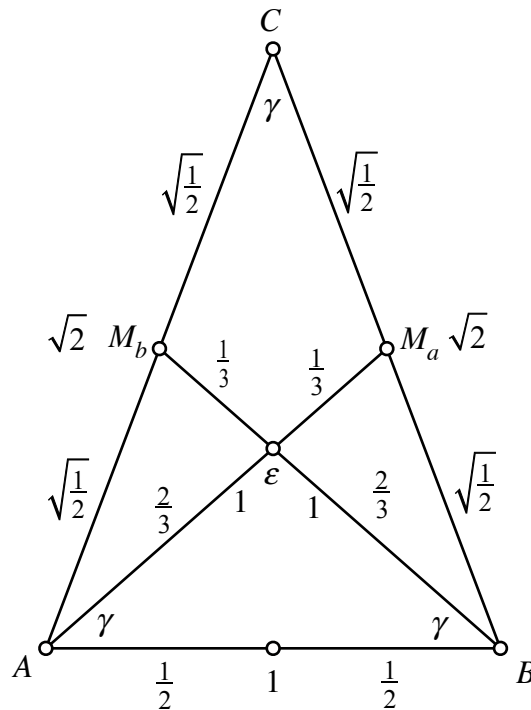
Beide Dreiecke können mit je drei Rechtecken im DIN-Format (Walser 2013) ausgelegt werden (Abb. 2).



**Abb. 2: DIN-Rechtecke**

## 2 Längen und Winkel

Für das Wurzel-2-Dreieck mit der Basislänge 1 gelten folgende Maße (Bezeichnungen nach Abb. 3).



**Abb. 3: Maße und Bezeichnungen**

Es ist:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41.4096^\circ \quad (1)$$

Dieser Winkel  $\gamma$  ist der Spitzenwinkel des Dreiecks, kommt aber auch an anderen Orten vor.

Weiter ist:

$$h_c = \frac{1}{2}\sqrt{7} \approx 1.3229 \quad (2)$$

$$\alpha = \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \approx 69.2952^\circ \quad (3)$$

$$\varepsilon = \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 97.1808^\circ \quad (4)$$

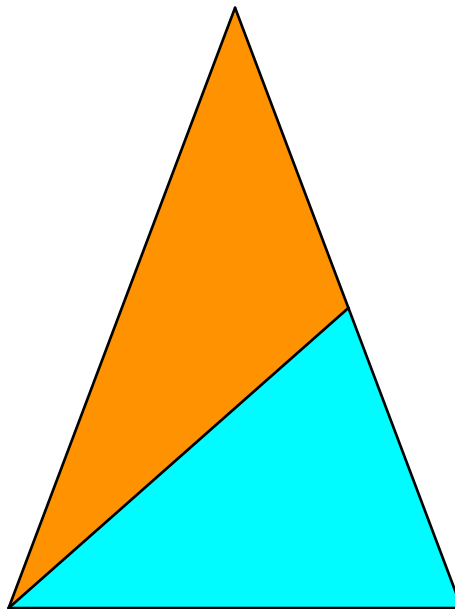
Weiter gilt für die Schwerlinien  $s_a$  und  $s_b$ :

$$s_a = s_b = 1 \quad (5)$$

Die Dreiecke  $M_bAB$  und  $BM_aA$  sind daher ebenfalls Wurzel-2-Dreiecke.

### 3 Zerlegungen

Die Abbildung 4 zeigt eine Zerlegung des Wurzel-2-Dreiecks durch eine von einer Basisecke ausgehende Schwerlinie in zwei flächengleiche Dreiecke.



**Abb. 4: Zerlegung**

Das eine der beiden Dreiecke (himmelblau) ist ebenfalls ein Wurzel-2-Dreieck. Das andere (orange) Dreieck hat das Seitenverhältnis  $2:\sqrt{2}:1$ . Der Lehrer Lämpel bringt hier die Bemerkung an, das sei eine geometrische Folge. Wir bezeichnen dieses Dreieck mit dem sperrigen Namen *Wurzel-2-Nebendreieck*.

### 3.1 Zerlegung des Wurzel-2-Nebendreiecks

Das Wurzel-2-Nebendreieck kann in eine Folge von Wurzel-2-Dreiecken zerlegt werden (Abb. 5a). Dabei wird der Flächeninhalt der Dreiecke schrittweise halbiert. Die Schenkellänge des folgenden Dreiecks ist die Basislänge des vorhergehenden Dreiecks. Zusammen mit dem Wurzel-2-Dreieck unten rechts haben wir nun eine Zerlegung des ursprünglichen Wurzel-2-Dreiecks in eine Folge von Wurzel-2-Dreiecken.

Diese Zerlegung erinnert an die Zerlegung des DIN A0-Rechteckes in Rechtecke DIN A1, A2, A3, ... (Walser 2013, S. 11, Abb. 1.4).

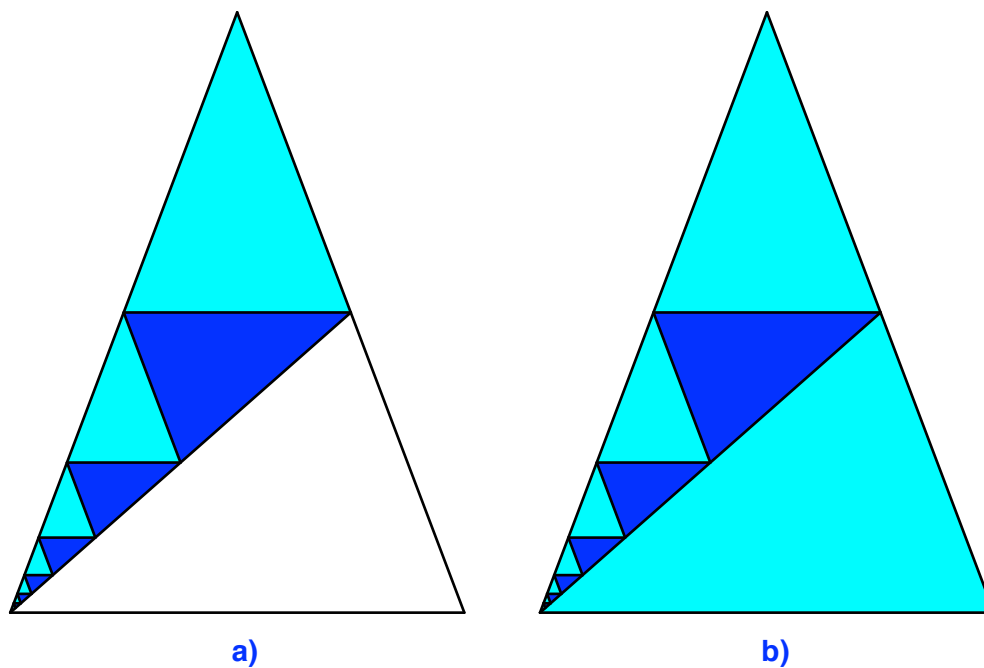
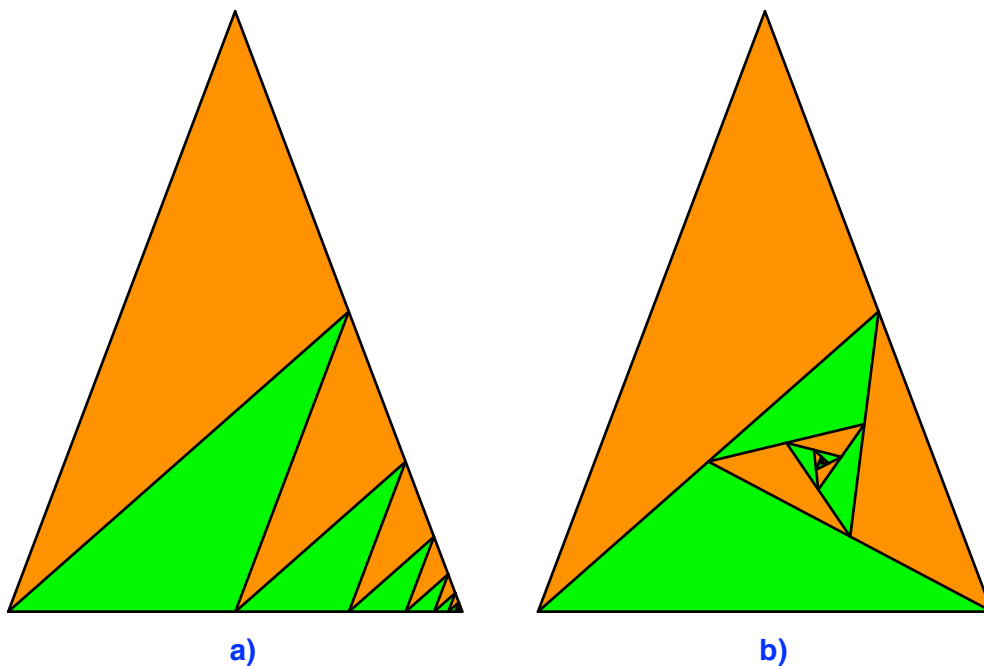


Abb. 5: Zerlegung

### 3.2 Zerlegung des Wurzel-2-Dreiecks

Wir können umgekehrt das Wurzel-2-Dreieck in eine Folge von Wurzel-2-Nebendreiecken zerlegen. Die Abbildung 6a zeigt eine einfache Lösung mit dem Grenzpunkt rechts unten, die Abbildung 6b eine spiralförmige Lösung mit einem Grenzpunkt im Innern. In der Abbildung 6a sind die orangen und die grünen Dreiecke ungleichsinnig ähnlich. In der Abbildung 6b sind alle Teildreiecke gleichsinnig ähnlich. Es gibt unendlich viele weitere Lösungen.



**Abb. 6: Zerlegungen in Wurzel-2-Nebendreiecke**

Frage: Gibt es analoge Zerlegungen für andere Dreiecke?

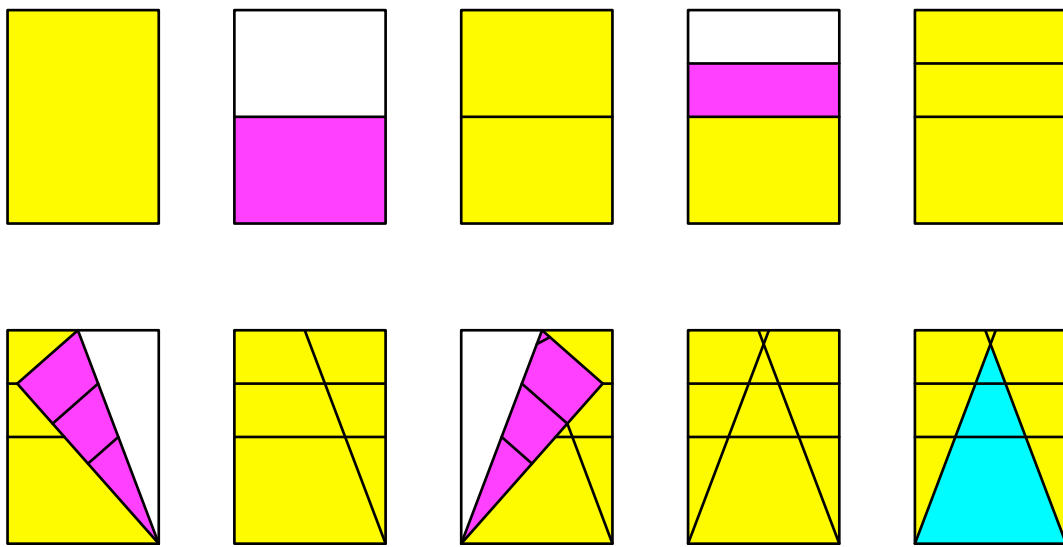
## 4 Falten

Das Wurzel-2-Dreieck kann durch Falten konstruiert werden. Dies geht sowohl mit einem Papier im DIN-Format wie auch mit einem quadratischen Origami-Papier. Beide Faltkonstruktionen sind exakt.

### 4.1 Papier im DIN-Format

Die Abbildung 7 zeigt den Faltvorgang. Zu Orientierungszwecken wird angenommen, das Papier sei vorne gelb und hinten magenta.

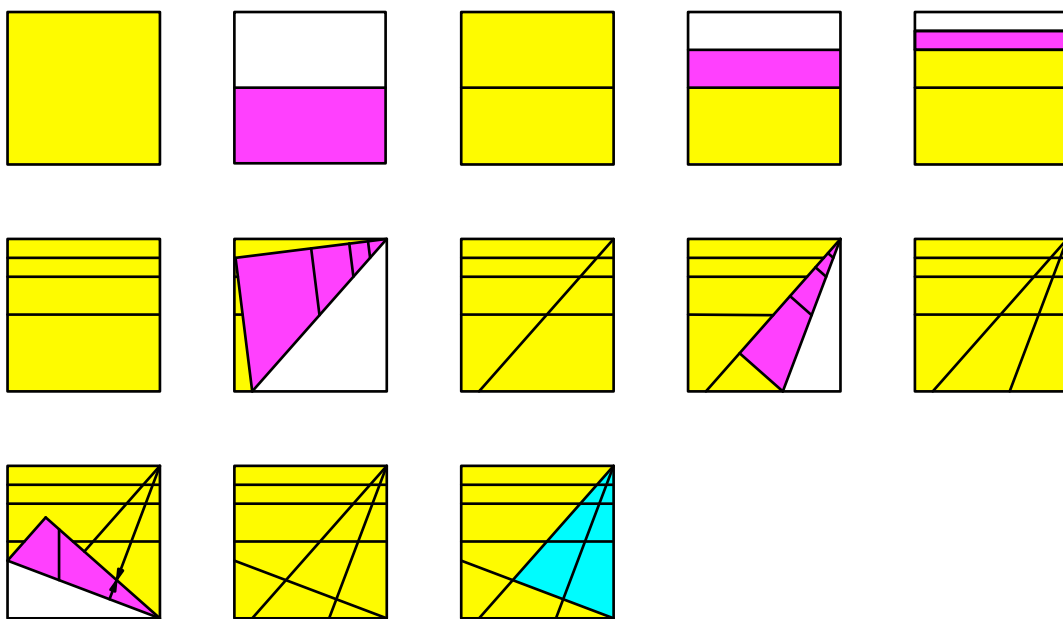
Die beiden schrägen Faltlinien definieren das Wurzel-2-Dreieck.



**Abb. 7: Falten bei DIN-Papier**

#### 4.2 Quadratisches Origami Papier

Die Abbildung 8 zeigt den Faltvorgang.

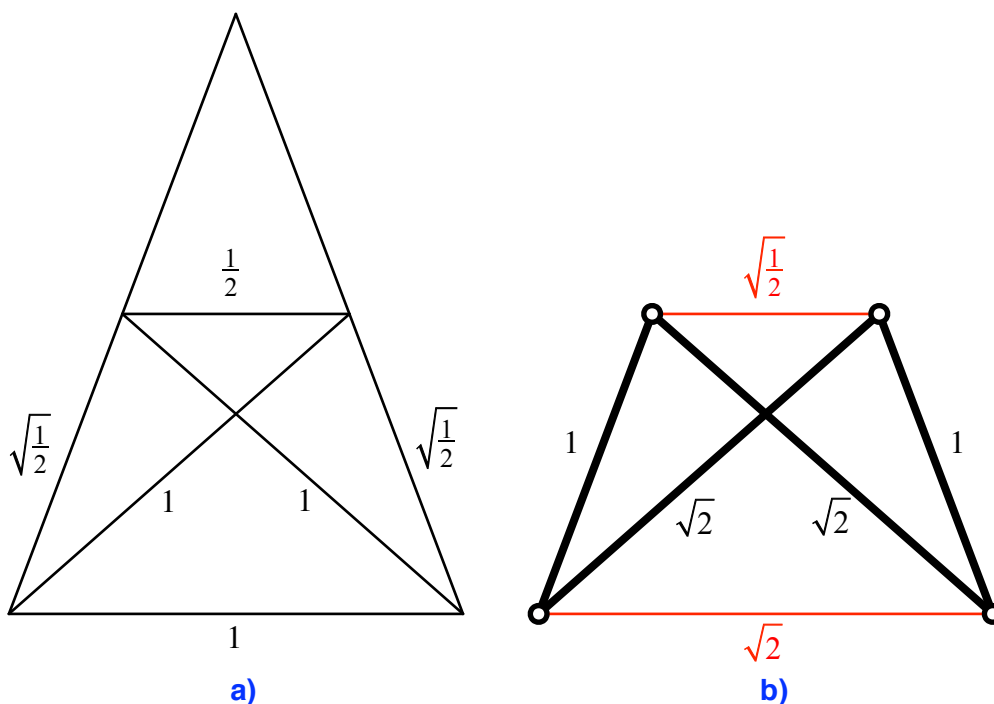


**Abb. 8: Falten bei Origami-Papier**

Wer clever ist, holt noch ein zweites Wurzel-2-Dreieck heraus.

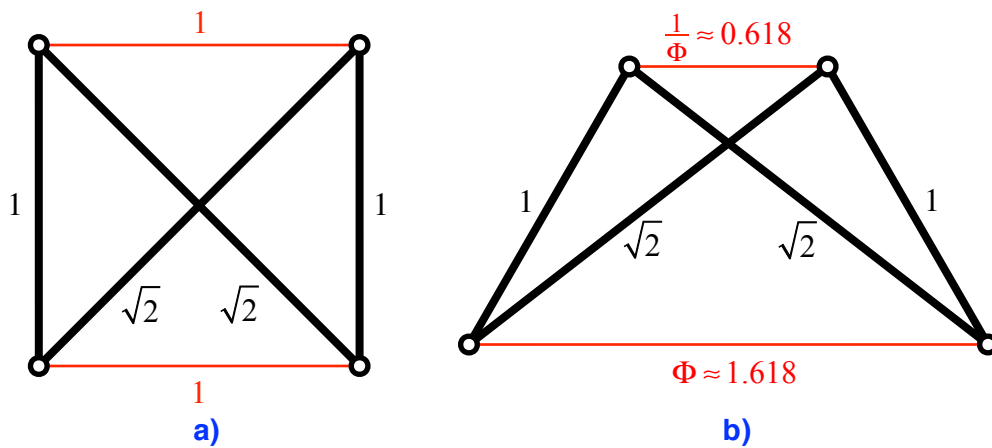
## 5 Das Wurzel-2-Trapez

Wir schneiden auf halber Höhe die Spitze des Wurzel-2-Dreieckes ab (Abb. 9a). Es bleibt ein gleichschenkliges Trapez übrig. Durch Strecken mit dem Faktor  $\sqrt{2}$  erhält die Grundparallele die Länge  $\sqrt{2}$ , die Schenkel erhalten die Länge 1 und die Deckparallele die Länge  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , also den Kehrwert der Grundparallele (Abb. 9b). Die Diagonalen erhalten ebenfalls die Länge  $\sqrt{2}$ .



**Abb. 9: Abschneiden zum Trapez**

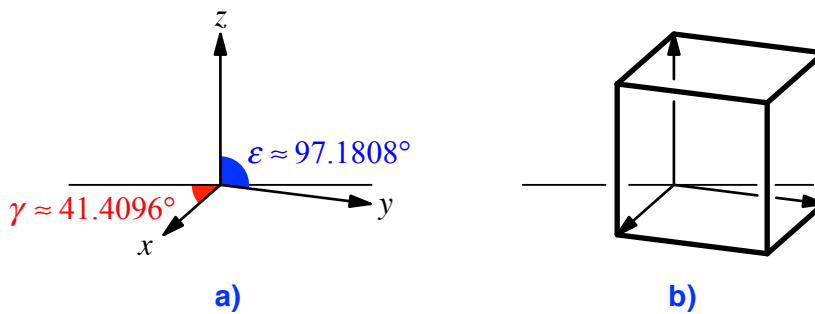
Dieses Trapez kann als spezielle Position eines Gelenkmodells gesehen werden, das aus den vier in der Abbildung 9b fett eingezeichneten Stäben der Längen  $\sqrt{2}$  und 1 besteht (Walser 2013, S. 37, 38, 44). Die beiden Parallelseiten haben dann inverse Längen. Die Abbildung 10 zeigt zwei andere Positionen dieses Gelenkmodells.



**Abb. 10: Andere Positionen**

**6 Dimetrische Axonometrie**

Den Spitzenwinkel  $\gamma = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41.4096^\circ$  des Wurzel-2-Dreieckes treffen wir auch bei der dimetrischen Axonometrie an (Abb. 11a mit den Einheitsvektoren auf den Achsen). Ebenfalls treffen wir dort den Schnittwinkel  $\varepsilon = \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 97.1808^\circ$  der beiden Schwerlinien  $s_a$  und  $s_b$  an. Die Winkel in der Abbildung 11 sind rein planimetrisch zu verstehen, nicht etwa räumlich. Im Raum misst ja der Winkel zwischen der y-Achse und der z-Achse  $90^\circ$ .



**Abb. 11: Dimetrische Axonometrie**

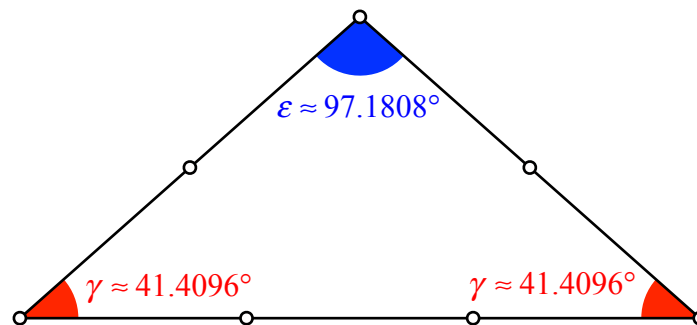
In der Abbildung 11b ist das dimetrische Bild des Einheitswürfels eingetragen.



## 7 Rationale Seitenverhältnisse

Das Seitenverhältnis im Wurzel-2-Dreieck ist irrational. Es gibt aber auch Dreiecke mit rationalen Seitenverhältnissen, bei denen Vielfache (modulo  $180^\circ$ ) der Winkel  $\gamma = \arccos\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41.4096^\circ$  und  $\varepsilon = \arccos\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 97.1808^\circ$  erscheinen.

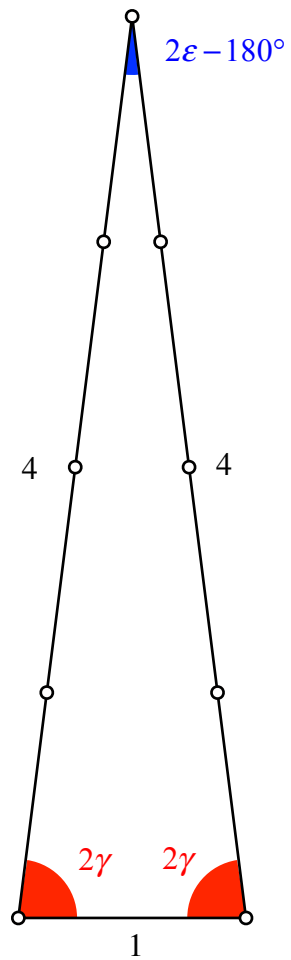
### 7.1 Seitenverhältnis 3:2:2



**Abb. 12: Seitenverhältnis 3:2:2**

Dieses Dreieck erscheint auch als Teildreieck in der Abbildung 3.

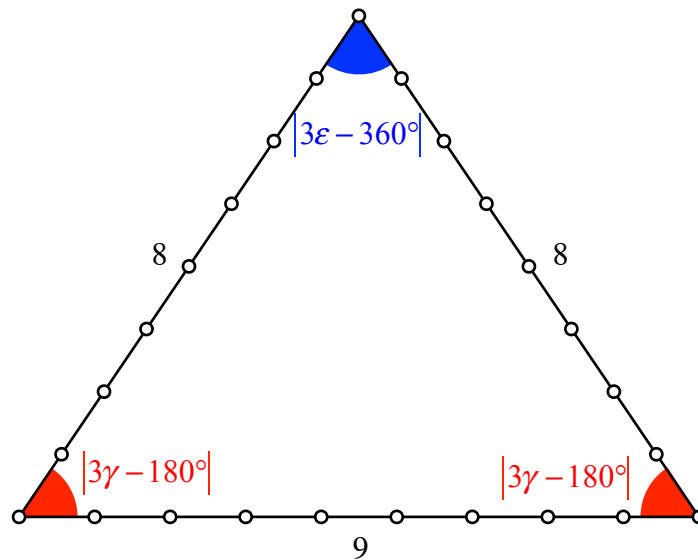
### 7.2 Seitenverhältnis 1:4:4



**Abb. 13: Seitenverhältnis 1:4:4**

Die Winkel sind modulo  $180^\circ$  verdoppelt.

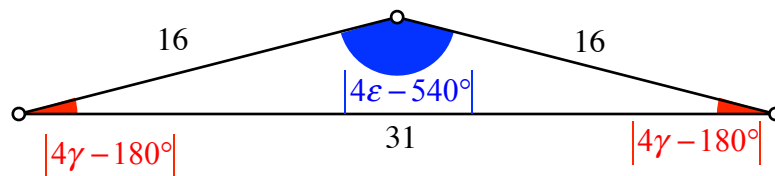
### 7.3 Seitenverhältnis 9:8:8



**Abb. 14: Seitenverhältnis 9:8:8**

Die Winkel sind modulo  $180^\circ$  verdreifacht.

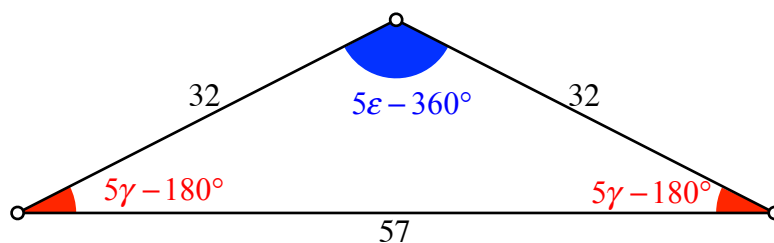
### 7.4 Seitenverhältnis 31:16:16



**Abb. 15: Seitenverhältnis 31:16:16**

Die Winkel sind modulo  $180^\circ$  vervierfacht.

### 7.5 Seitenverhältnis 57:32:32



**Abb.16: Seitenverhältnis 57:32:32**

Die Winkel sind modulo 180° verfünffacht.

Frage: Gibt es ein analoges Vorgehen für andere Winkel?

### 7.6 Übersicht

#### 7.6.1 Positive Zahlen

Die Tabelle 1 gibt eine Übersicht.

Faktor	Basis	Schenkel	Schenkel
1	3	2	2
2	1	4	4
3	9	8	8
4	31	16	16
5	57	32	32
6	47	64	64
7	87	128	128
8	449	256	256
9	999	512	512
10	1201	1024	1024

**Tab. 1: Übersicht**

Für den Vervielfachungsfaktor  $n$  ist die Schenkellänge:

$$a_n = 2^n \tag{6}$$

Für die Basislänge gilt:

$$c_n = |2a_n \cos(n\gamma)| \quad (7)$$

### 7.6.2 Weglassen der Betragsstriche

Mit

$$d_n = 2a_n \cos(n\gamma) \quad (8)$$

erhalten wir die Werte der Tabelle 2.

$n$	$d_n$	$a_n$
1	3	2
2	1	4
3	-9	8
4	-31	16
5	-57	32
6	-47	64
7	87	128
8	449	256
9	999	512
10	1201	1024

**Tab. 2: Mit Minuszeichen**

Bei der Folge  $d_n$  handelt es sich um die Folge A247563 der [oeis](#). Sie hat die Rekursion:

$$d_n = 3d_{n-1} - 4d_{n-2} \quad (9)$$

## **Weblinks**

Oeis, The On-Line Encyclopedia for Integer Sequences:

<https://oeis.org>

Horst Steibl, Braunschweig:

<http://www.horst-steibl.de>

Hans Walser: Miniaturen: DIN-Format:

[http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen\\_Uebersicht/DIN\\_Format/index.html](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen_Uebersicht/DIN_Format/index.html)

## **Literatur**

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.