Hans Walser, [20161224]

Würfel-Puzzle

Anregung: G. M., S.

1 Worum geht es?

Ein Weihnachtsgeschenk in Form eines Würfelpuzzles führt zu topologischen und zahlentheoretischen Fragen.

2 Das Puzzle

Die Abbildung 1 zeigt die sechs einzelnen Bauteile eines Würfelpuzzles.

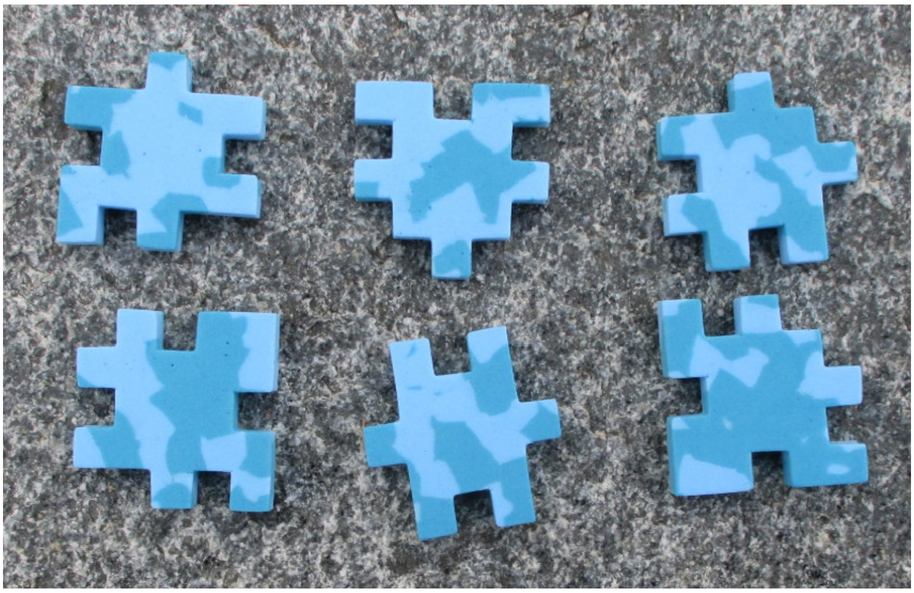

Abb. 1: Bauteile

Die Bauteile der Abbildung 1 passen je in einen 5×5-Raster (Abb. 2).

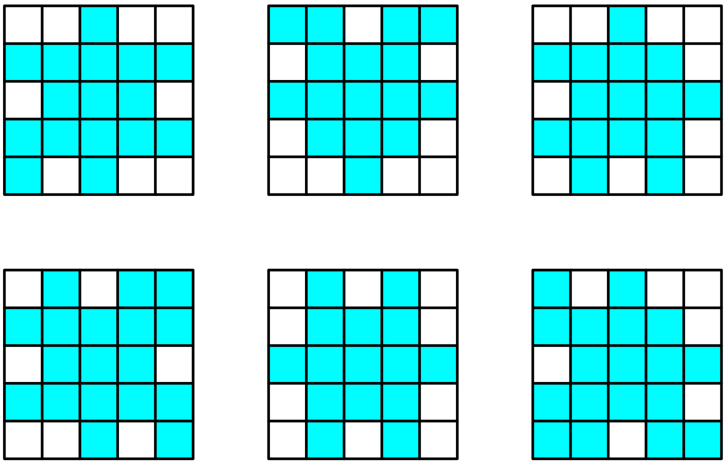

Abb. 2: Bauteile im Raster

Die Abbildung 3 zeigt einen zusammengesteckten Würfel. Die Frage, ob die sechs Bauteile auf verschiedene Weise zu einem Würfel zusammengesteckt werden können, habe ich nicht untersucht.

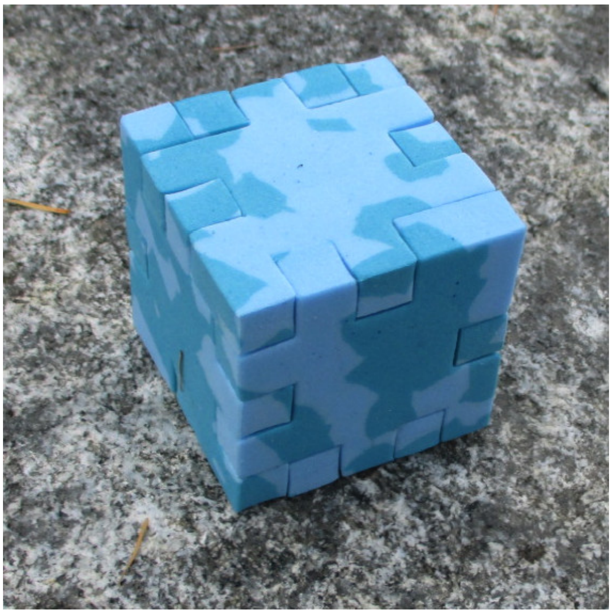

Abb. 3: Zusammengesteckter Würfel

Die Abbildung 4 zeigt ein anderes Set von sechs Bauteilen.

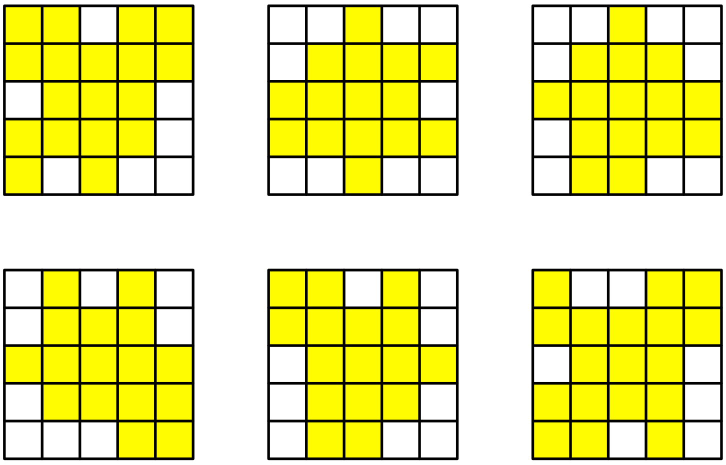

Abb. 4: Anderes Set von sechs Bauteilen

Die sechs Bauteile der Abbildungen 2 beziehungsweise 4 sind nicht kongruent. Sie haben auch nicht denselben Flächeninhalt.

3 Fragen

(1) Gibt es ein Set von sechs kongruenten Bauteilen?

(2) Gibt es ein Set von sechs Bauteilen mit gleicher Fläche?

(3) Wie ist es in einem anderen Raster, etwa in einem 6×6-Quadratraster?

4 Bearbeitung

Die drei Fragen sind zu verneinen.

4.1 Kongruente Bauteile?

Sechs kongruente Bauteile sind nicht möglich.

Der Würfel hat 8 Ecken. Jede Würfelecke erscheint in genau einem Bauteil als Ecke des Rasters. Die Abbildung 5 zeigt die Bauteile der Abbildung 2 mit dunkelblau eingefärbten Ecken. Diese sind ganz unregelmäßig auf die Bauteile verteilt.

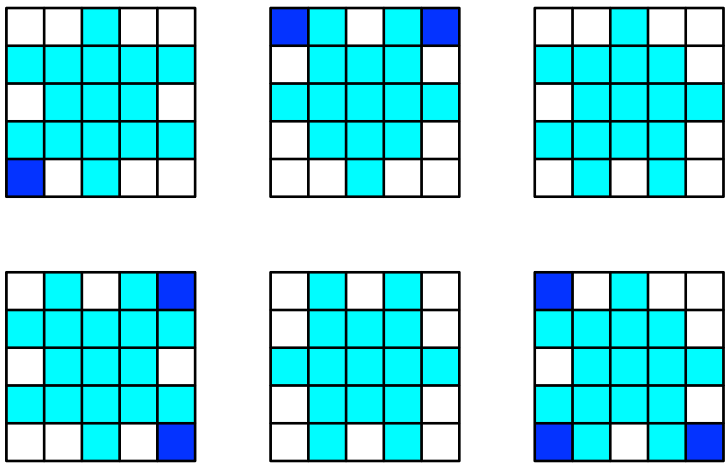

Abb. 5: Würfelecken

Bei sechs kongruenten Bauteilen müssten die acht Ecken gleichmäßig auf die Bauteile verteilt sein. Das ist nicht möglich, da 8 nicht durch 6 teilbar ist.

Die Abbildung 6 zeigt ein Set von sechs kongruenten Bauteilen. Diese lassen sich zwar zu einem Würfel zusammenstecken, aber die acht Eckwürfelchen fehlen.

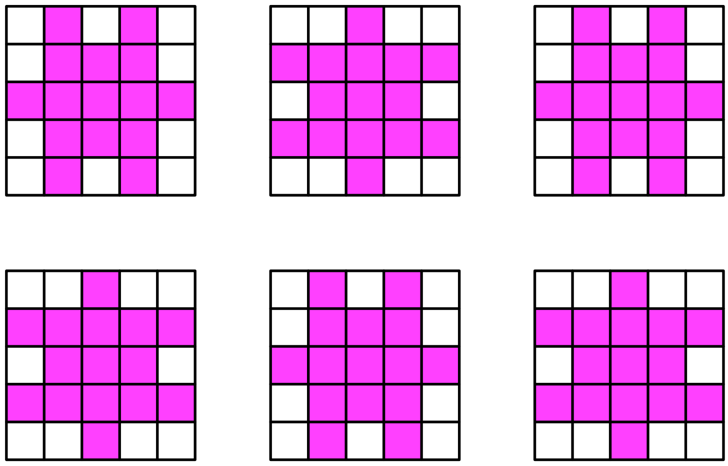

Abb. 6: Die acht Ecken fehlen

4.2 Flächengleiche Bauteile?

Beim hellblauen Set der Abbildung 2 haben wir für die einzelnen Bauteile der Reihe nach die Flächeninhalte 16, 16, 15, 18, 15, 18. Die Flächensumme ist 98. Das ist nicht durch 6 teilbar.

Beim gelben Set der Abbildung 4 haben wir für die einzelnen Bauteile die Flächeninhalte 18, 15, 15, 16, 16, 18. Die Summe ist wiederum 98, also nicht durch 6 teilbar.

Tatsächlich ist die Flächensumme immer 98.

Dies kann mit einer Volumenüberlegung eingesehen werden. Der zusammengesteckte Würfel (Abb. 3) ist außen ein 5×5×5-Würfel mit den Volumen $5^3 = 125$, hat aber im Innern einen 3×3×3-Würfel mit den Volumen $3^3 = 27$ als Hohlraum. Das Volumen der Würfelwandung ist also $5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$. Die Bauteile sind Prismen der Dicke (Höhe) 1. Sie haben also die gesamte Grundfläche 98. Dies ist nicht durch 6 teilbar.

4.3 Anderer Raster?

Wir müssten zwei mittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen finden, so dass die Differenz ihrer Kuben durch 6 teilbar ist. Nun ist aber:

$$(a+1)^3-(a-1)^3=\left(a^3+3a^2+3a+1\right)-\left(a^3-3a^2+3a-1\right)=6a^2+2 \qquad (1)$$

Das ist nicht durch 6 teilbar.

5 Andere Dimensionen?

5.1 Zweidimensionale Welt

In einer zweidimensionalen Welt können wir problemlos vier kongruente Bauteile zu einem Quadrat zusammenstecken (Abb. 7).

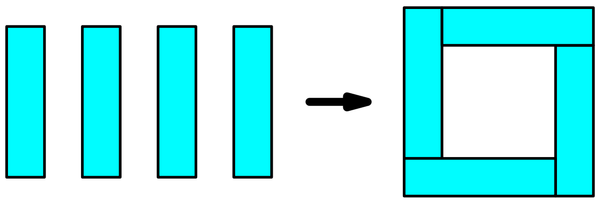

Abb. 7: In der zweidimensionalen Welt

Die zu (1) analoge Rechnung lautet denn auch:

$$(a+1)^2-(a-1)^2=\left(a^2+2a+1\right)-\left(a^2-2a-1\right)=4a \tag{2}$$

Das ist problemlos durch 4 teilbar.

5.2 Vierdimensionale Welt

Ein 4d-Hyperwürfel hat 8 3d-Hyperseiten (Würfel), 24 2-dHyperelemente (Flächen), 32 Kanten und 16 Eckpunkte.

Die zu (1) analoge Rechnung:

$$\begin{aligned}(a+1)^4-(a-1)^4&=\left(a^4+4a^3+6a^2+4a+1\right)-\left(a^4-4a^3+6a^2-4a+1\right)\\&=8a^3+8a\end{aligned} \tag{3}$$

Es ist also nicht auszuschließen, dass es mit 8 volumengleichen Bauteilen geht. Ob es auch mit kongruenten Bauteilen geht, entzieht sich meiner Vorstellungskraft.

5.3 Höhere Dimensionen

In den Dimensionen 5 und 6 führt die zu (1) analoge Rechnung zu einem Widerspruch zur entsprechenden Teilbarkeitsbedingung.

Ein brute force check lässt vermuten, dass es genau für die Dimensionen 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., also für die Zweierpotenzen, geht.