

Hans Walser, [20121104x]

Winkel im Dreieck

1 Ausgangslage

Wir unterteilen die Seiten eines regelmäßigen Dreiecks in je 60 Teile. Dann gelten zwischen den Seitenanteilen und Winkel die Beziehungen der Abbildung 1.

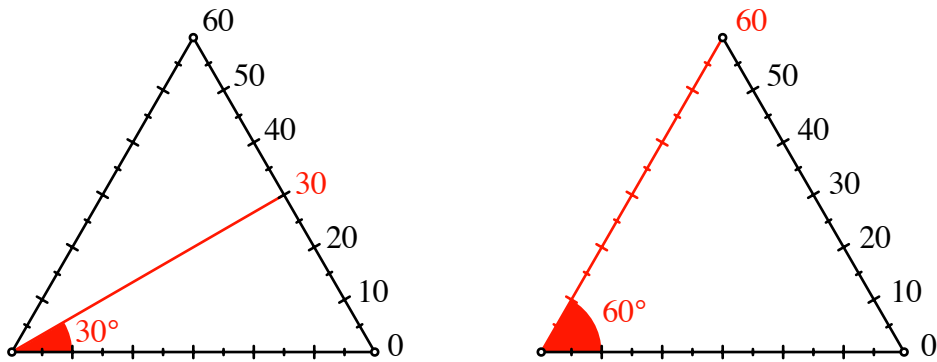


Abb. 1: Seitenanteile und Winkel, korrekt

2 Der Fehler

Wir vermuten, dass die Seitenanteile und die Winkel generell übereinstimmen. Die Abbildung 2 zeigt zwei Beispiele dazu.

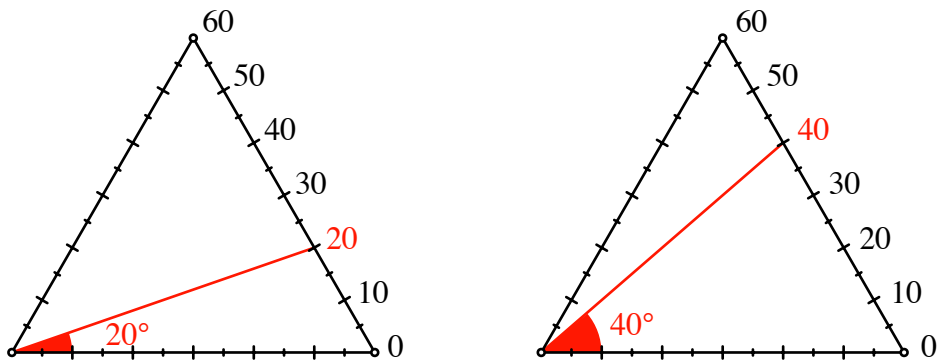


Abb. 2: Achtung Fehler!

3 Wo steckt der Fehler?

Der Fehler steckt darin, dass in unserem Kontext die Linearität (also die Verhältnismäßigkeit) *nicht* gilt. Letztlich liegt das daran, dass die Tangensfunktion *nicht* linear ist. Die Abbildung 3 zeigt die (approximativ) korrekten Winkelangaben.

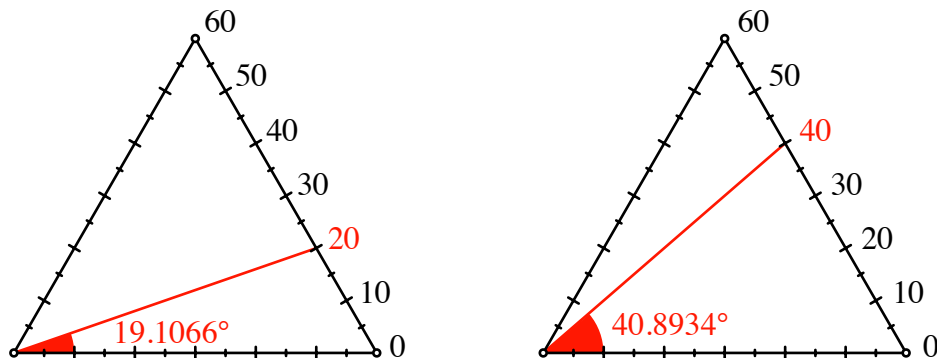


Abb. 3: Die richtigen Winkel

Obwohl die Seite gedrittelt wird, haben wir *keine* Winkeldrittung.

4 Wie wird das gerechnet?

Wir können zum Beispiel wie folgt den Winkel berechnen (Abb. 4).

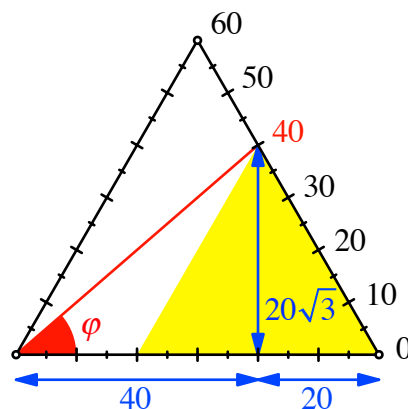


Abb. 4: Berechnung

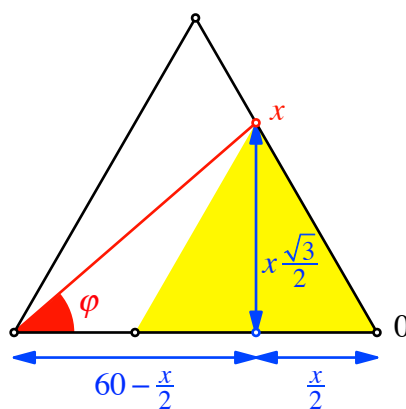
Im Beispiel der Abbildung 4 erhalten wir:

$$\tan(\varphi) = \frac{20\sqrt{3}}{40}$$

und daraus:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 40.8934^\circ$$

Allgemein gilt gemäß Abbildung 5:

**Abb. 5: Bezeichnungen**

$$\tan(\varphi) = \frac{x \frac{\sqrt{3}}{2}}{60 - x}$$

und daher:

$$\varphi(x) = \arctan\left(\frac{x \sqrt{3}}{120 - x}\right).$$

5 Tabelle und Graf

Die Tabelle 1 zeigt die Funktionswerte in extenso.

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0	0°	30	30°
1	0.833884°	31	31.102522°
2	1.681537°	32	32.204228°
3	2.542924°	33	33.304305°
4	3.417981°	34	34.401950°
5	4.306619°	35	35.496367°
6	5.208719°	36	36.586776°
7	6.124132°	37	37.672414°
8	7.052677°	38	38.752538°
9	7.994141°	39	39.826430°
10	8.948276°	40	40.893395°
11	9.914799°	41	41.952767°
12	10.893395°	42	43.003912°
13	11.883707°	43	44.046226°
14	12.885347°	44	45.079138°
15	13.897886°	45	46.102114°
16	14.920862°	46	47.114653°
17	15.953774°	47	48.116293°
18	16.996088°	48	49.106605°
19	18.047233°	49	50.085201°
20	19.106605°	50	51.051724°
21	20.173570°	51	52.005859°
22	21.247462°	52	52.947323°
23	22.327586°	53	53.875868°
24	23.413224°	54	54.791281°
25	24.503633°	55	55.693381°
26	25.598050°	56	56.582019°
27	26.695695°	57	57.457076°
28	27.795772°	58	58.318463°
29	28.897478°	59	59.166116°
30	30°	60	60°

Tab. 1: Funktionswerte

Die Abbildung 6 zeigt den Funktionsgraphen.

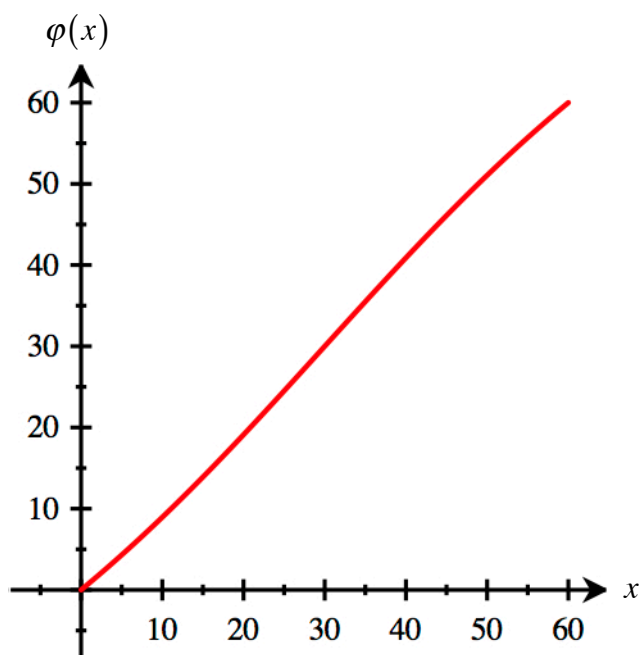


Abb. 6: Funktionsgraf

Wir sehen sowohl in der Tabelle wie auch im Funktionsgraphen, dass die Abweichung von der falschen Vermutung $\varphi(x) = x$ nicht sehr groß ist.

6 Didaktisches

Im Schulunterricht sind zur Zeit Modellierungen große Mode. Dabei soll die Modellierung stufengerecht möglichst einfach sein. Unser Beispiel zeigt, dass die einfache Modellierung durch eine lineare Funktion falsch ist, wenn auch im von uns betrachteten Fall nicht krass falsch. Wird allerdings der Bereich ausgedehnt, ergeben sich starke Fehler.

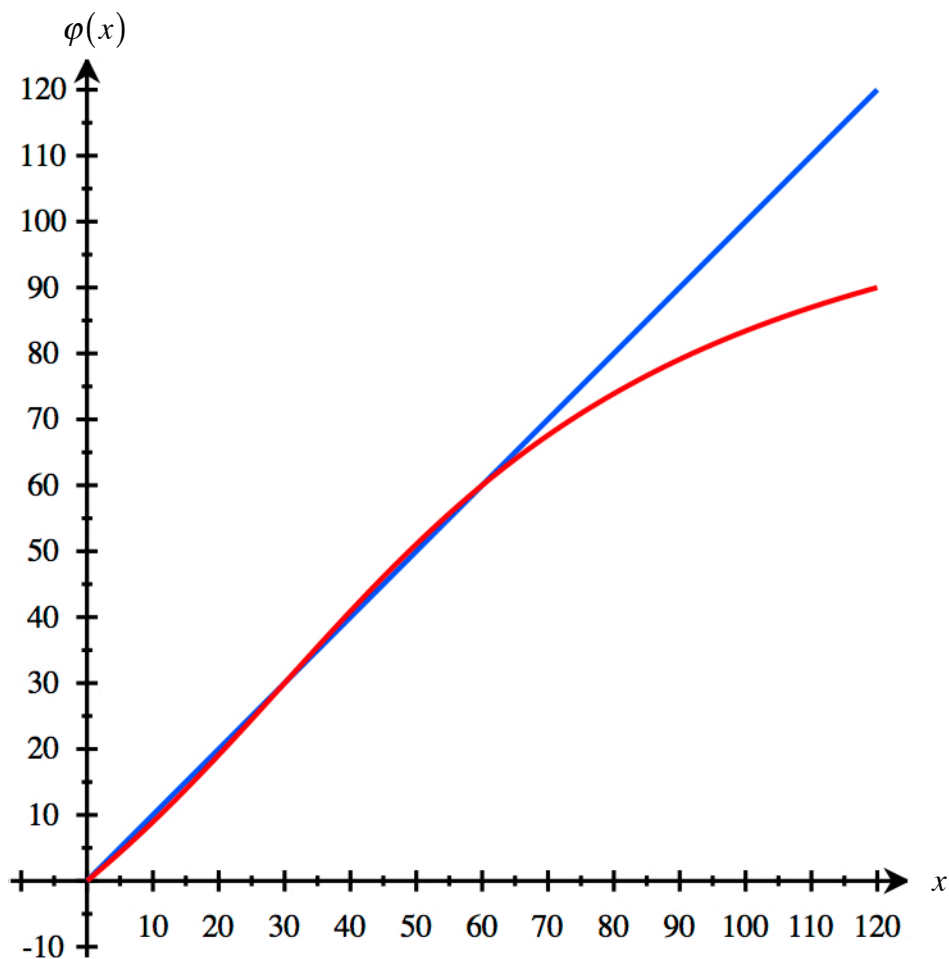


Abb. 7: Abweichungen

Die Differentialrechnung ist ein wichtiges Beispiel, wo mit lokalen Linearisierungen gearbeitet wird.

7 Einfacheres Beispiel

Wir arbeiten in einem rechtwinkligen Dreieck gemäß Abbildung 8.

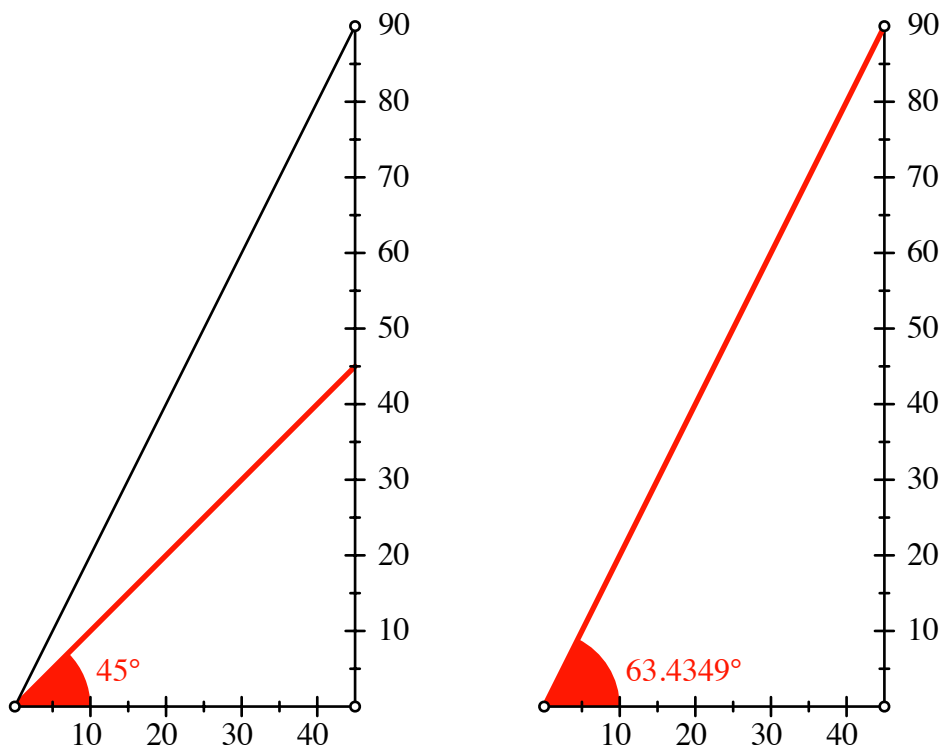


Abb. 8: Einfacheres Beispiel