Hans Walser, [20100331a], [20160710]

## Van Schooten's Theorem

Anregung: Chr. P., B.

### 1 Worum geht es?

Im gleichseitigen Dreieck gilt ein eigenartiger Summensatz (van Schooten's Theorem), der sich als Sonderfall des Satzes von Ptolemäus erweist.

Das van Schooten's Theorem wird verallgemeinert.

### 2 Gleichseitiges Dreieck

Auf dem Bogen *AB* des Umkreises eines gleichseitigen Dreieckes *ABC* wählen wir einen Punkt *P* (Abb. 1). Die Sehnen *PA, PB* und *PC* bezeichnen wir mit *x, y, z*. Dann gilt van Schooten's Theorem:

$$x + y = z$$

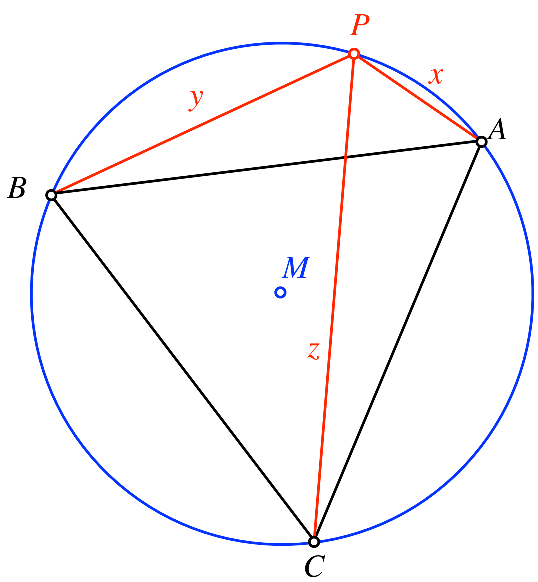


**Abb. 1:** $x + y = z$

Frans van Schooten (1615-1660), niederländischer Mathematiker.

### 3 Beweise

(Viglione 2016) gibt einen schönen Beweis ohne Worte.

#### 3.1 Beweis mit einer Drehung

Die Peripheriewinkel $\sphericalangle CPA$ und $\sphericalangle BPC$ messen beide 60°, da die zugehörigen Zentriwinkel je 120° messen.

Wir drehen nun das gelbe Dreieck *APB* um *A* um 60° (Abb. 2). Das Bilddreieck ist *AQC* mit $Q \in PC$ . Das Dreieck *APQ* ist gleichseitig.

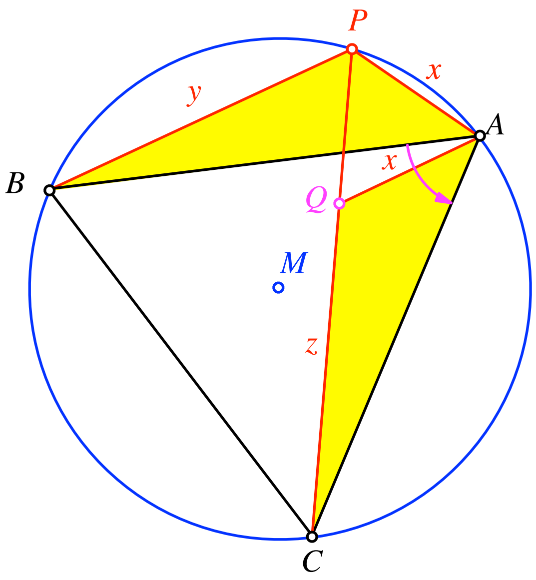


**Abb. 2: Beweisfigur**

Somit ist $z = \overline{PC} = \overline{PQ} + \overline{QC} = x + y$.

### 3.2 Beweis mit dem Satz des Ptolemäus

Das Viereck *APBC* ist ein Sehnenviereck. In einem Sehnenviereck ist nach dem Satz des Ptolemäus das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Mit der Seitenlänge *s* des gleichseitigen Dreiecks heißt das in unserem Fall:

$$zs = xs + ys$$

Daraus folgt unmittelbar van Schooten's Theorem.

### 3.3 Beweis mit dem Kosinus-Satz

Es sei *s* die Seitenlänge des gleichseitigen Dreieckes *ABC* und *r* dessen Umkreisradius. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

(i) $x = y$. Der Punkt *P* liegt in der Mitte des Bogens *AB*. Es ist $x = y = r$ und $z = 2r$, somit $x + y = z$.

(ii) $x \neq y$. Im Dreieck *APC* liefert der Kosinus-Satz:

$$s^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos(60°) = x^2 + z^2 - xz$$

Im Dreieck *CPB* erhalten wir analog:

$$s^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos(60°) = y^2 + z^2 - yz$$

Differenz der beiden Gleichungen:

$$0 = x^2 - xz - y^2 + yz = x^2 - y^2 - z(x-y) = (x+y)(x-y) - z(x-y)$$
$$0 = (x+y) - z$$
$$x + y = z$$

# 4 Verallgemeinerungen

## 4.1 Quadrat

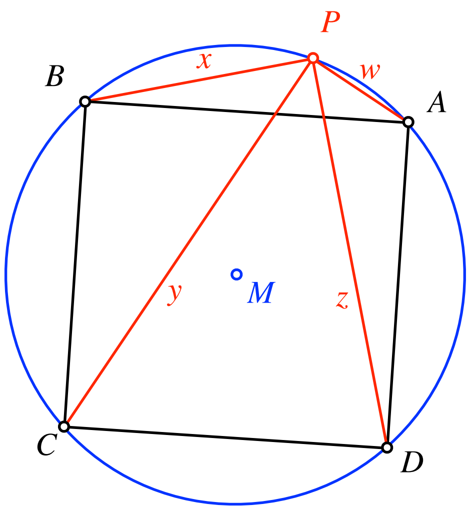


**Abb. 3: Quadrat**

In der Situation der Abbildung 3 gilt:

$$y + z = \left(1 + \sqrt{2}\right)(w + x)$$

Beweis:

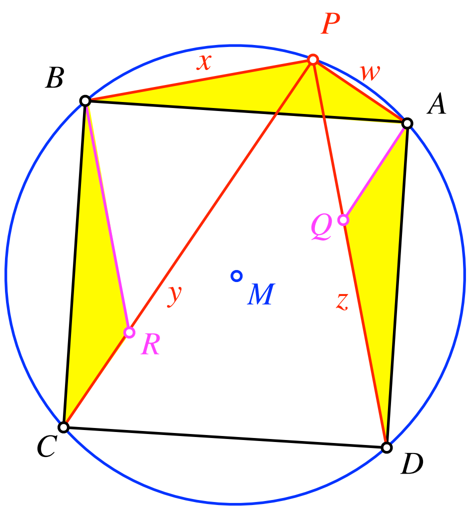


**Abb. 4: Beweisfigur**

Durch Drehen des Dreiecks $APB$ um $A$ um 90° beziehungsweise um $B$ um –90° folgt:

$$y = w + \sqrt{2}\,x$$
$$z = \sqrt{2}\,w + x$$
$$y + z = \left(1+\sqrt{2}\right)w + \left(1+\sqrt{2}\right)x = \left(1+\sqrt{2}\right)(w + x)$$

### 4.2 Pentagon

Es versteht sich von selbst, dass hier der goldene Schnitt erscheinen muss (Walser 2001), (Walser 2013). Wir verwenden die Schreibweise:

$$\Phi = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Die Abbildung 5 zeigt die Situation im Pentagon.

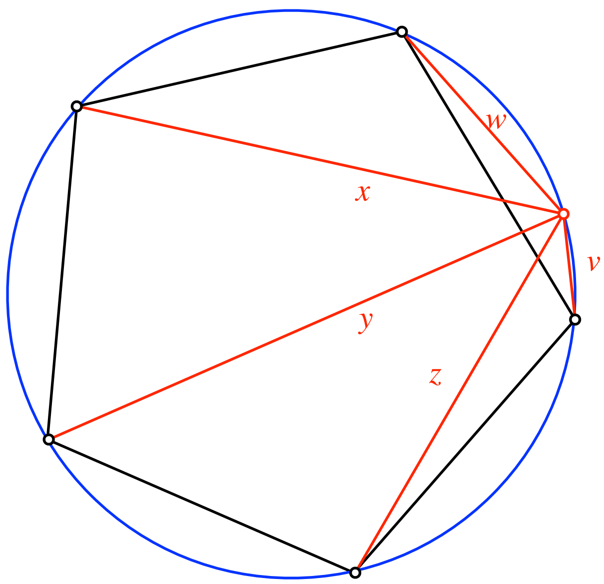


**Abb. 5: Pentagon**

Mit den Bezeichnungen der Abbildung 5 gilt:

$$x + z = \Phi^2 (v + w)$$
$$y = \Phi(v + w)$$

Für den Beweis der ersten Zeile verwenden wir die beiden in der Abbildung 6 angedeuteten Drehungen um 108° beziehungsweise –108°.

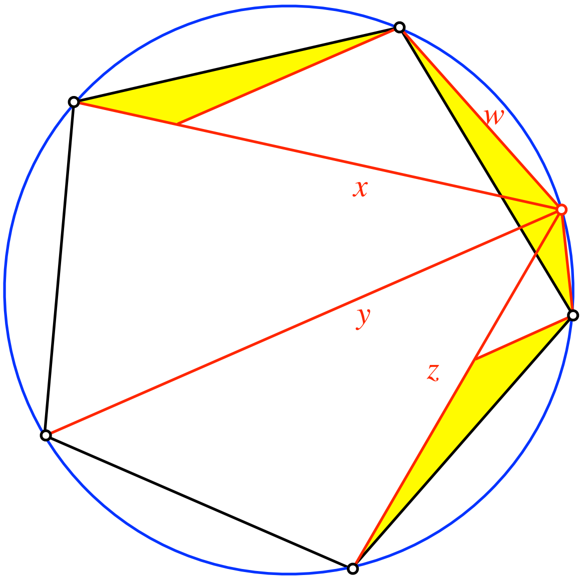


**Abb. 6: Beweisfigur mit zwei Drehungen**

Es ist dann:

$$x = v + \Phi w$$
$$z = w + \Phi v$$
$$x + w = v + w + \Phi(w + v) = (v + w)\underbrace{(1 + \Phi)}_{\Phi^2} = \Phi^2 (v + w)$$

Für den Beweis der zweiten Zeile verwenden wir die in er Abbildung 7 angedeutete Drehstreckung mit dem Drehwinkel 72° und dem Streckfaktor $\Phi$.

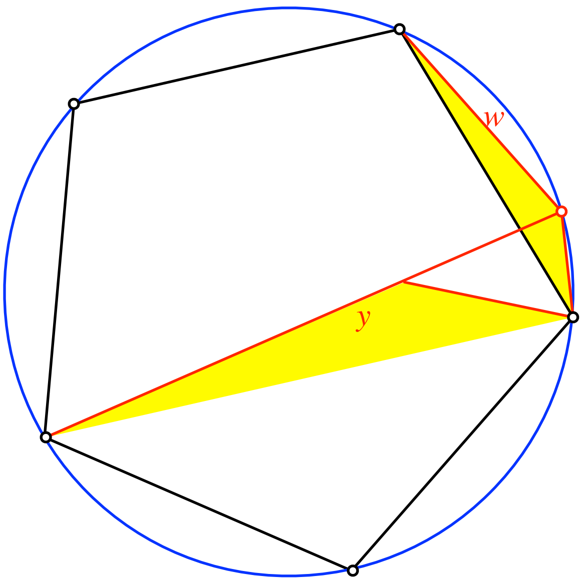


**Abb. 7: Beweisfigur mit einer Drehstreckung**

Es ist:

$$y = \Phi(v + w)$$

Insgesamt haben wir:

$$x + y + z = (v + w)\left(\Phi^2 + \Phi\right) = (v + w)(1 + 2\Phi) = (v + w)\left(2 + \sqrt{5}\right)$$

Die weitere Verallgemeinerung auf das reguläre $n$-Eck sei der geneigten Leserin überlassen.

## 5 Allgemeines Dreieck

Bezeichnungen gemäß Abbildung 8.

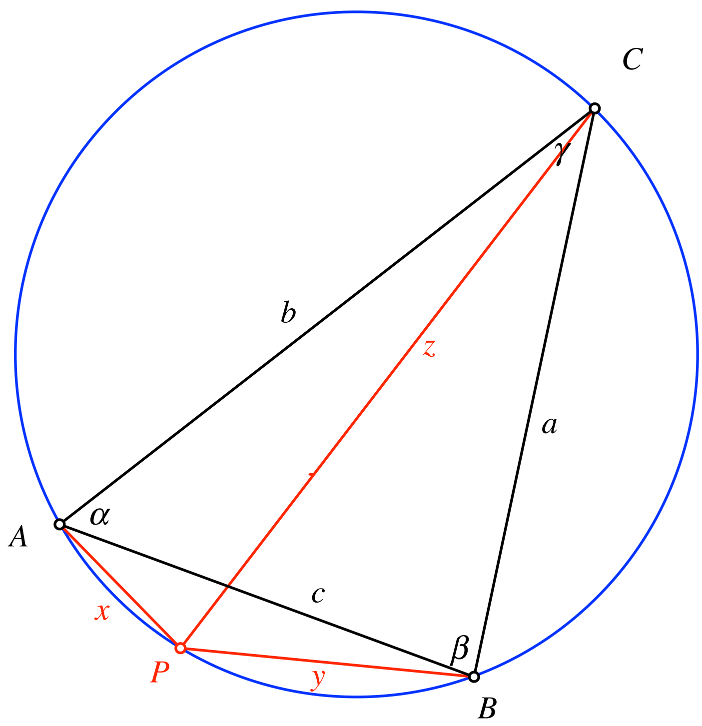


**Abb. 8: Allgemeines Dreieck**

Es gilt:

$$ax + by = cz$$

Bemerkung: Das ist der Satz des Ptolemäus.

Der Satz des Ptolemäus wird in der Regel so formuliert, dass in einem Sehnenviereck (bei uns das Viereck $APBC$) das Produkt der beiden Diagonalen (bei uns $cz$) gleich ist der Summe der Produkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten (bei uns $ax + by$).

Für den Beweis arbeiten wir mit den Bezeichnungen der Abbildung 9.

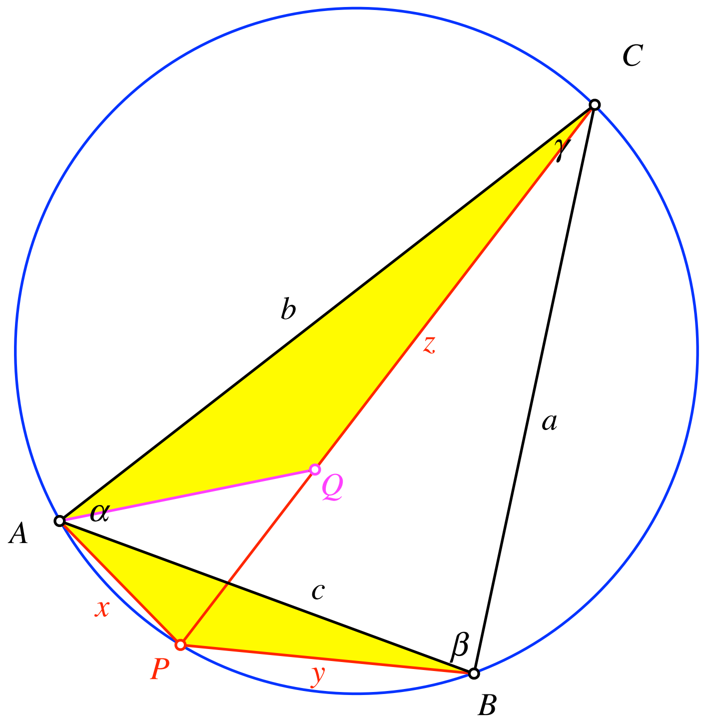


**Abb. 9: Beweisfigur**

Wir bilden das Dreieck $APB$ mit einer Drehstreckung auf das Dreieck $AQC$ ab. Drehzentrum $A$, Drehwinkel $\alpha$, Streckfaktor $\frac{b}{c}$. Mit Winkelüberlegungen kann gezeigt werden, dass das Dreieck $APQ$ ähnlich ist zum Dreieck $ABC$ und dass $Q \in PC$.

Somit ist:

$$\frac{\overline{PQ}}{x} = \frac{a}{c}$$

$$\overline{QC} = \frac{b}{c} y$$

$$z = \overline{PQ} + \overline{QC} = \frac{a}{c} x + \frac{b}{c} y$$

$$cz = ax + by$$

## Literatur

Viglione, Raimund (2016): Proof Without Words: van Schooten's Theorem. Mathematics Magazine 89 (2016) 132.

Walser, Hans (2001): The Golden Section. Translated by Peter Hilton and Jean Pedersen. The Mathematical Association of America 2001. ISBN 0-88385-534-8.

Walser, Hans (2013): Der Goldene Schnitt. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.