Hans Walser, [20191101]

Viereckspiralen

1 Worum geht es?

Spiralen auf der Basis eines unregelmäßigen Vierecks.

2 Die beiden Spiralen

Wir beginnen mit einem unregelmäßigen Viereck (Abb. 1). Das Viereck ist zwar unregelmäßig, aber nicht beliebig. Wir kommen später darauf zurück.

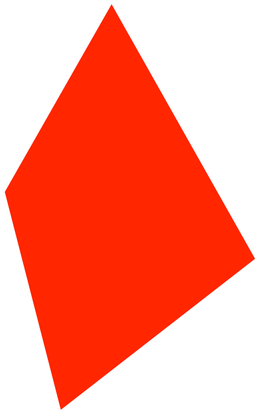

Abb. 1: Viereck

Dem Viereck fügen wir ein zweites von gleicher Form an (Abb. 2).

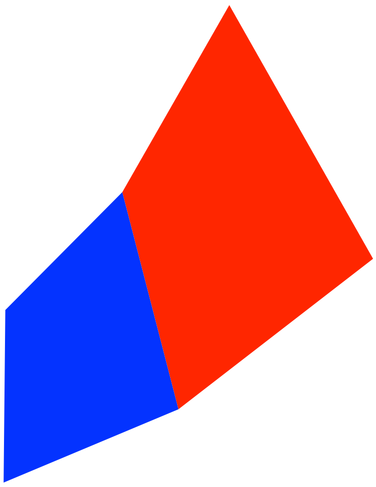

Abb. 2: Zweites Viereck

Das zweite (blaue) Viereck ist gegenüber dem ersten verkleinert. Der Längen-Veränderungsfaktor ist das Verhältnis der Länge der Seite links unten zur Länge der Seite rechts oben im ersten (roten) Viereck. Zudem ist das zweite Viereck gegenüber dem ersten verdreht. Der Drehwinkel ist der Winkel zwischen der Seite rechts oben und der Seite rechts unten im ersten (roten) Viereck. Das zweite Viereck geht also aus dem ersten Viereck durch eine Drehstreckung hervor.

Nun fügen wir nach dem gleichen Verfahren ein weiteres Viereck an (Abb. 3).

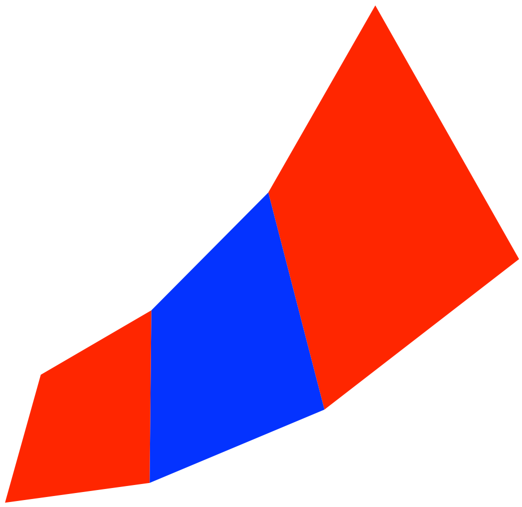

Abb. 3: Drittes Viereck

Wenn wir so weiterfahren, entsteht eine eckige Spirale (Abb. 4). Da wir mit Drehstreckungen arbeiten, handelt es sich um eine logarithmische Spirale.

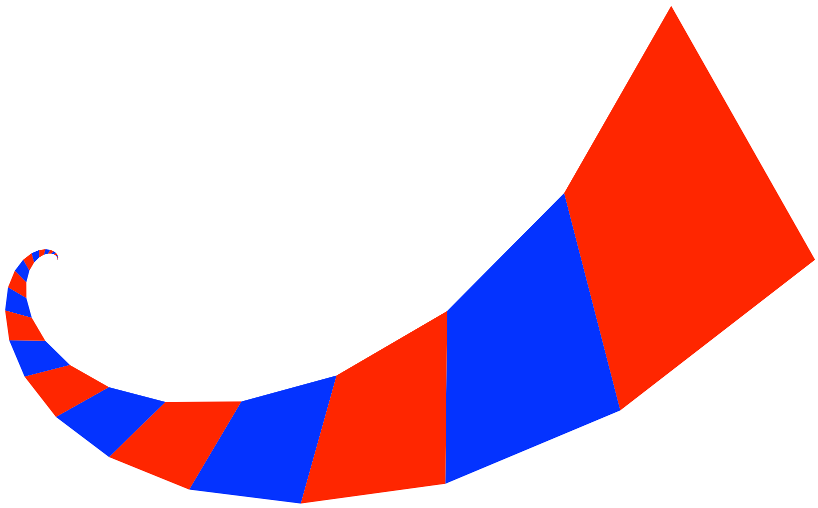

Abb. 4: Spirale

Wir können allerdings dem Startviereck der Abbildung 1 auch oben ein Viereck von gleicher Form anfügen (Abb. 5).

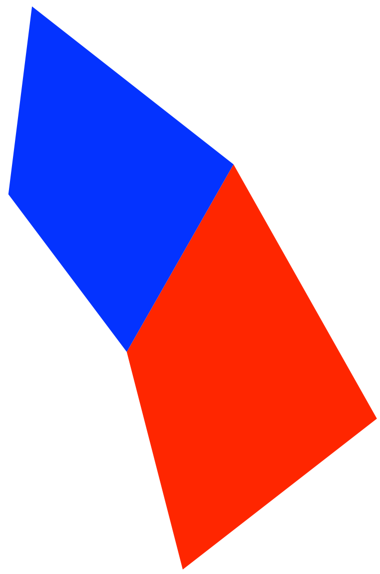

Abb. 5: Zweites Viereck oben angefügt

Wenn wir entsprechend weiterfahren, erhalten wir ebenfalls eine Spirale (Abb. 6).

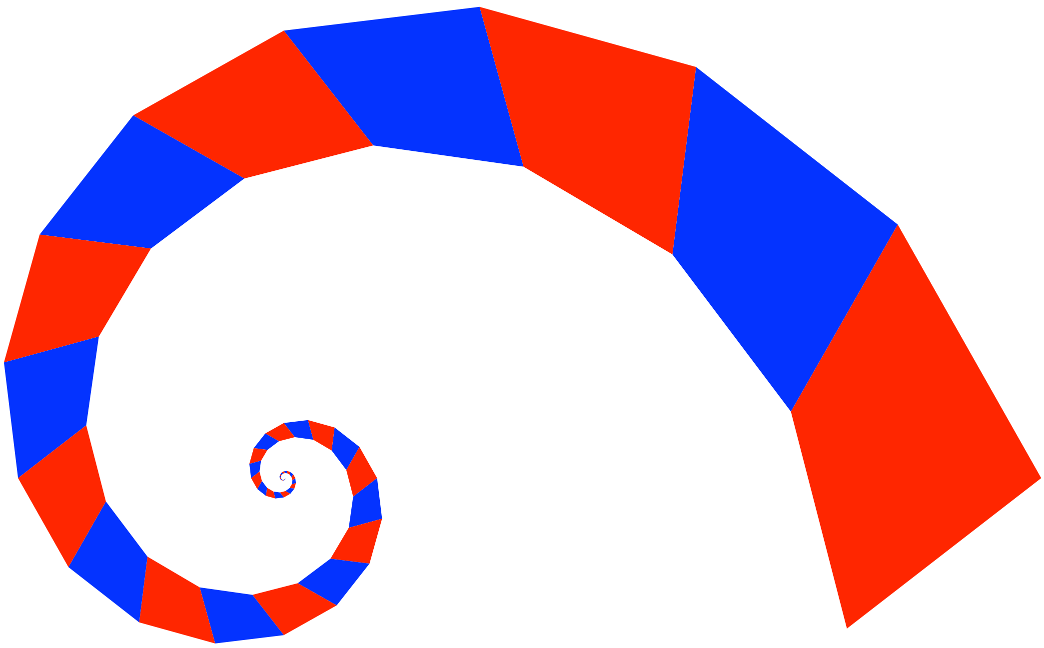

Abb. 6: Die andere Spirale

3 Überlagerung der beiden Spiralen

Die beiden Spiralen haben das gleiche Startviereck. Wenn wir sie überlagern, ergibt sich die Figur der Abbildung 7.

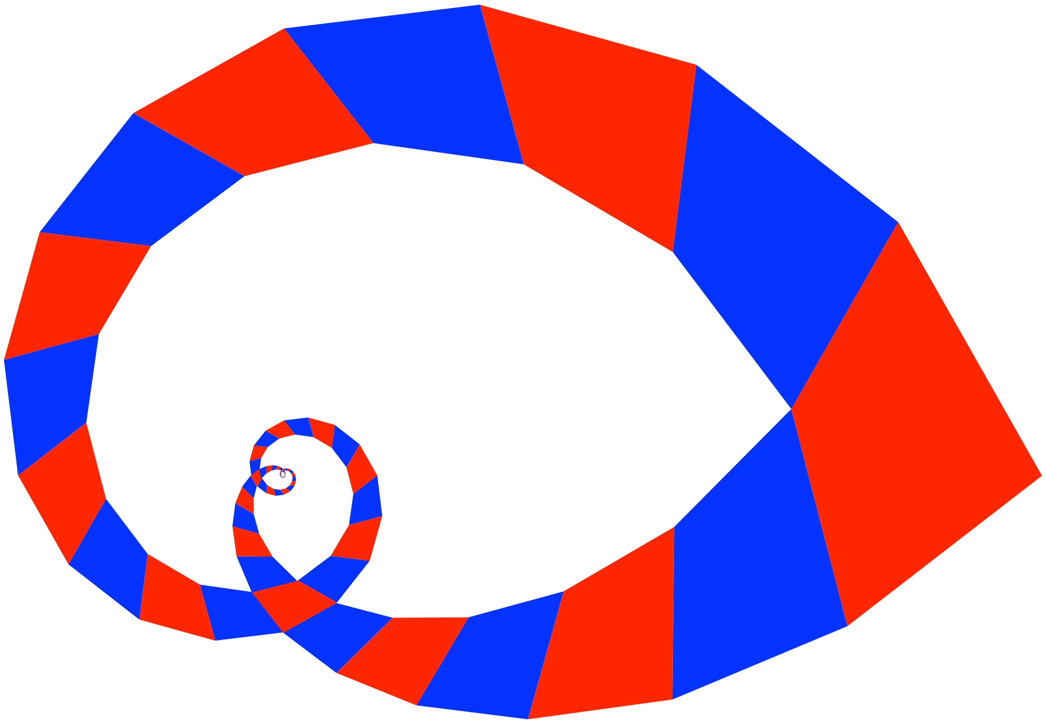

Abb. 7: Die beiden Spiralen

Wir stellen etwas Verblüffendes fest. Die beiden Spiralen treffen sich wieder und wieder und wieder ... . Und zwar kommen wir nach sechs Schritten auf der einen Spirale zum selben Viereck wie nach zwölf Schritten auf der anderen Spirale. Dieses zweite gemeinsame Viereck spielt nun dieselbe Rolle wie das gemeinsame Startviereck. Die innere Schlaufe ist also eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur. Wir erkennen noch zwei weitere solche Schlaufen. Im Prinzip sind es unendlich viele Schlaufen.

Das ist allerdings nicht bei jedem beliebigen Startviereck so. In der Regel überschneiden sich die beiden Spiralen nicht passend in einem gemeinsamen Viereck. Wir zeigen unten, wie das gemacht wurde.

4 Noch mehr Spiralen

Da alle Vierecke in der Abbildung 7 dieselbe Form haben, können wir jedes dieser Vierecke als Startviereck verwenden. So können wir etwa ausgehend vom zweiten Viereck (blau) in der unteren Spirale eine weitere Spirale nach oben starten. Diese überschneidet die untere Spirale ebenfalls in einem gemeinsamen Viereck.

Wir können daher die Ebene kohärent mit Spiralen füllen. Die Abbildung 8 illustriert einen Ausschnitt, begrenzt durch die beiden Startspiralen.

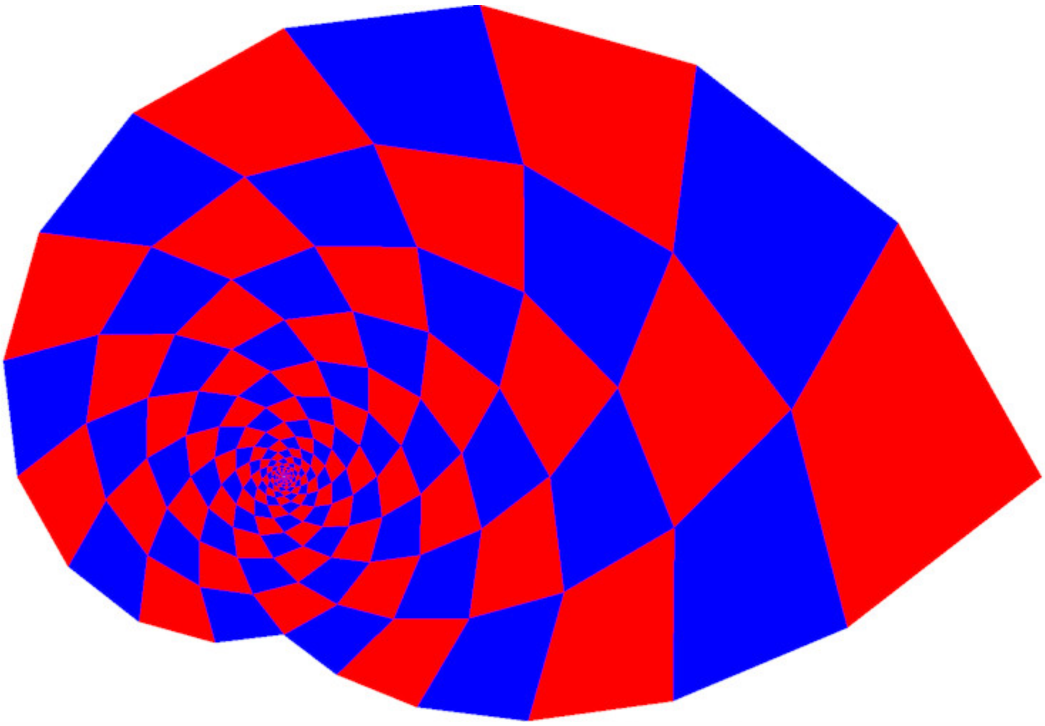

Abb. 8: Auffüllen mit Spiralen

Die Abbildung 9 zeigt einen zentralen Ausschnitt.

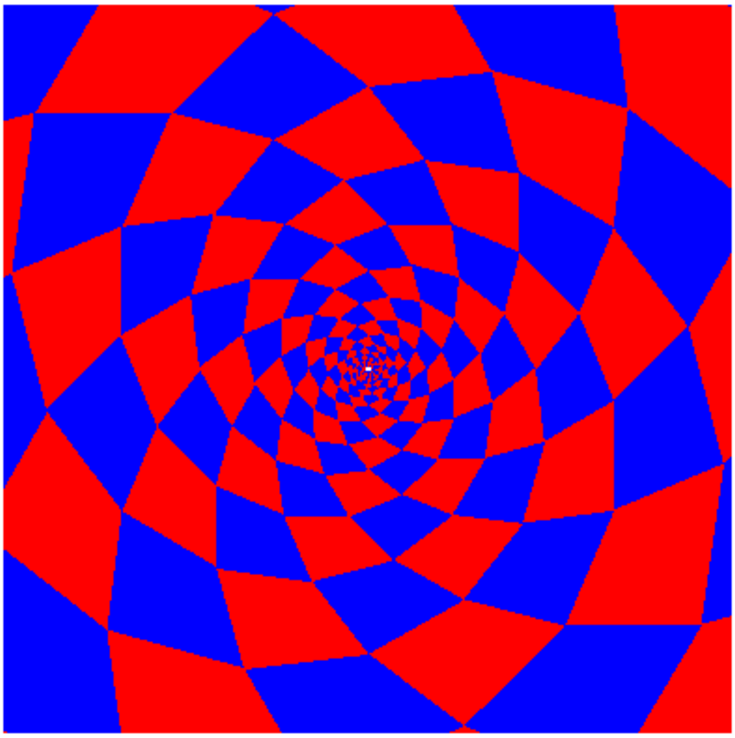

Abb. 9: Ausschnitt

Wir erkennen jetzt noch weitere Spiralen, gebildet durch Vierecke, welche übereck aneinandergefügt sind.

5 Wie es gemacht wird

Wir arbeiten mit einem im Prinzip unendlich langen Streifen in einem Parallelogramm-Punktraster (Abb. 10). Ein vertikaler Schnitt durch den Streifen muss die Höhe 2π haben. Unterkante und Oberkante des Streifens müssen bei einer Translation in der y-Richtung um 2π punktschlüssig aufeinander abbildbar sein. Ansonsten sind wir in der Gestaltung des Streifens frei.

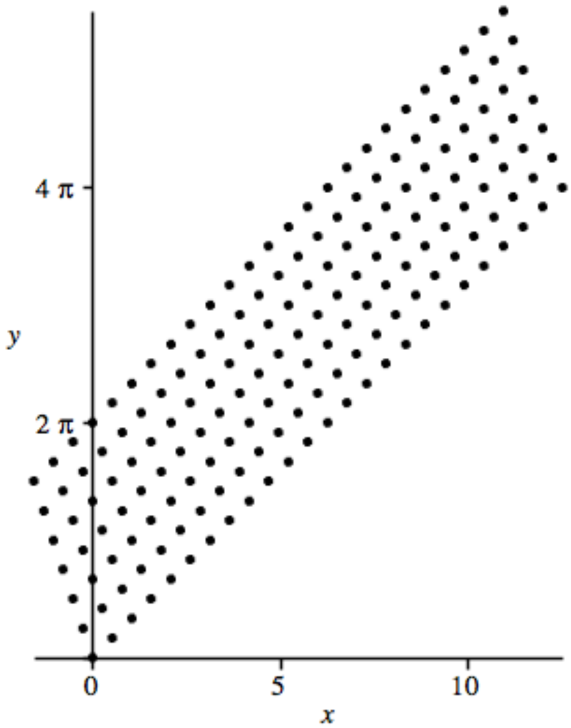

Abb. 10: Streifen im Punktraster

Wir bilden nun den Streifen mit der komplexen Exponentialabbildung $w = \mathrm{e}^z$ ab. Diese hat die reelle Darstellung:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^x \cos(y) \\ v &= \mathrm{e}^x \sin(y) \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen der Periodizität der Funktionen Kosinus und Sinus in (1) müssen wir beim Streifen in der y-Richtung eine Übereinstimmung nach einer Translation um 2π haben.
Die Abbildung 11 zeigt einen zentralen Ausschnitt des Bildes.

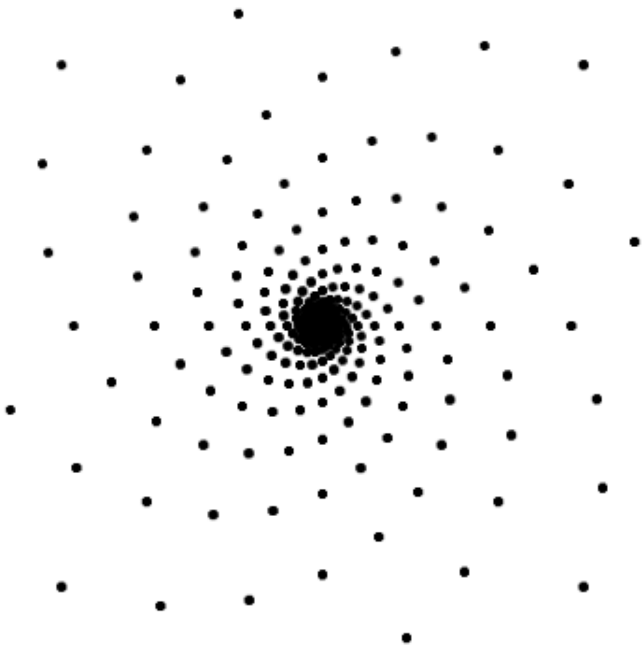

Abb. 11: Bild des Punktrasters

Wir erkennen sowohl linksläufige wie auch rechtsläufige Spiralen. Jeder Punkt liegt auf je einem dieser beiden Spiralentypen. Da wir mit der Exponentialfunktion abgebildet haben, handelt es sich um logarithmische Spiralen.

Die Abbildung 12 zeigt das Bild des für unsere Überlegungen verwendeten Punktrasters.

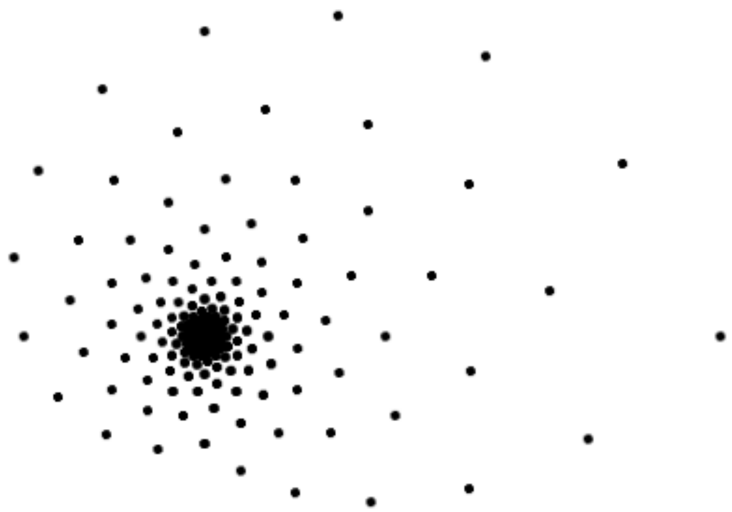

Abb. 12: Verwendeter Punktraster

Diese Punkte verbinden wir nun geradlinig zu Vierecken. Wir erkennen am rechten Bildrand der Abbildung 12 unser Startviereck.