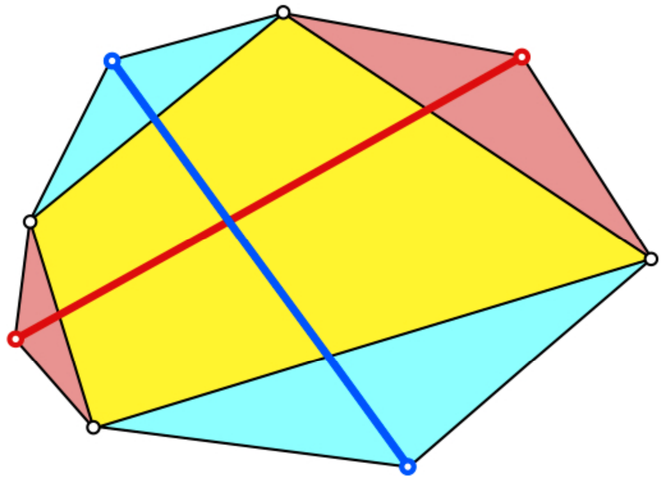
Hans Walser

Viereck mit orthogonalen Diagonalen

1 Ansetzen von ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken

Wir setzen den Seiten eines beliebigen Vierecks ähnliche gleichschenklige Dreiecke an.



Ähnliche gleichschenklige Dreiecke

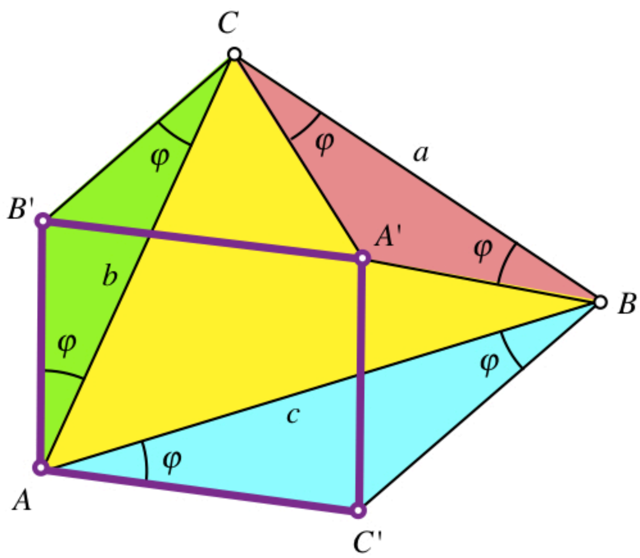
Die rote und die blaue Strecke sind genau dann gleich lang, wenn die Diagonalen des Viereckes orthogonal sind.

2 Beweis

Für den Beweis müssen wir etwas ausholen.

2.1 Ein Hilfssatz im Dreieck

Einem Dreieck ABC setzen wir ähnliche gleichschenklige Dreiecke mit den Basiswinkeln φ an, zwei nach außen und eins nach innen.

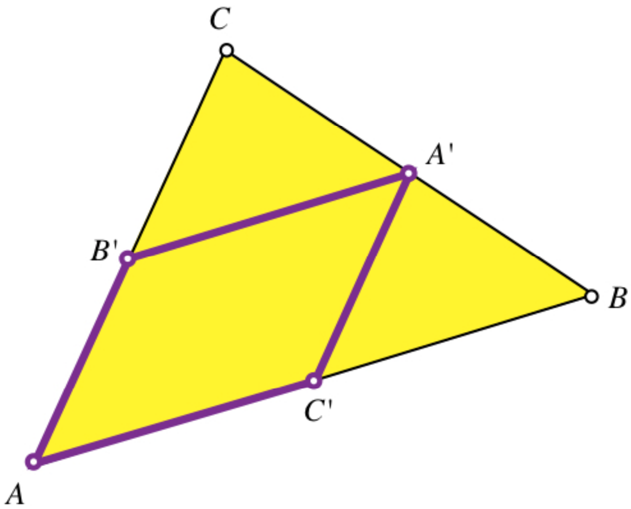


Ansetzen von gleichschenkligen Dreiecken

Dann ist das Viereck $AC'A'B'$ ein Parallelogramm.

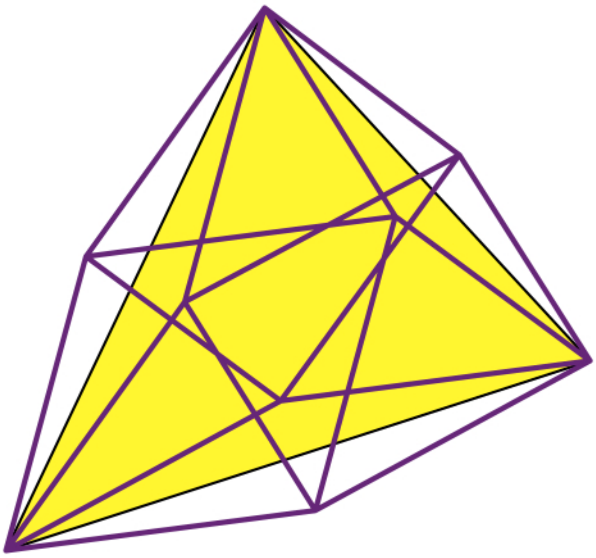
Beweis: Das Dreieck $CB'A'$ ist das Bild des Dreiecks CAB bei einer Drehstreckung um C mit dem Drehwinkel φ im Uhrzeigersinn und dem Streckfaktor $\frac{1}{2\cos(\varphi)}$. Die Strecke AC' ist das Bild der Strecke AB bei einer Drehstreckung um A, ebenso mit dem Drehwinkel φ im Uhrzeigersinn und dem Streckfaktor $\frac{1}{2\cos(\varphi)}$. Daher sind die Strecken AC' und $A'B'$ gleich lang und parallel. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Bemerkung 1: Für $\varphi = 0$ ergibt sich der Sonderfall mit den Seitenmitten.



Sonderfall mit Drehwinkel null

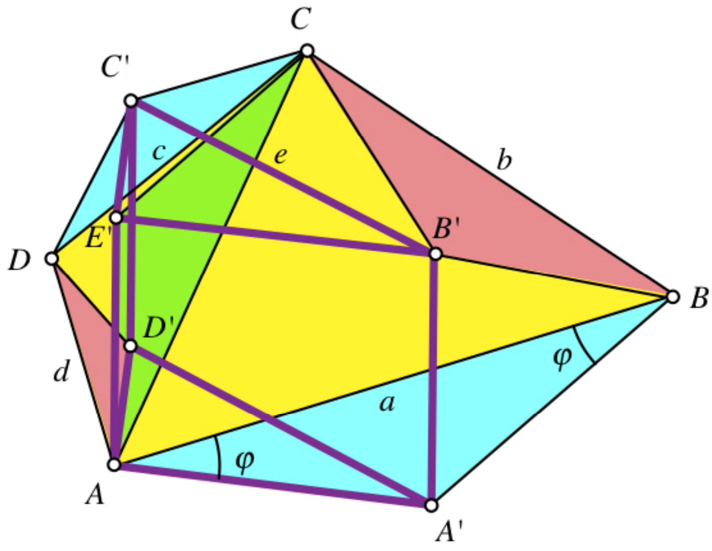
Bemerkung 2: Für $\varphi \neq 0$ gibt es sechs Kombinationen innen / außen bezüglich des Ansetzens der gleichschenkligen Dreiecke und damit auch sechs Parallelogramme.



Sechs Parallelogramme

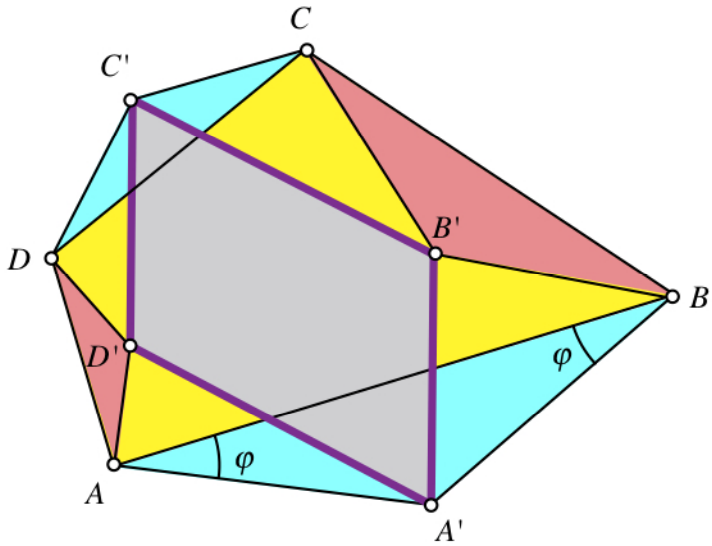
2.2 Ein schöner Satz im Viereck

Wir setzen einem beliebigen Viereck ähnliche gleichschenklige Dreiecke abwechslungsweise nach außen und nach innen auf. Ebenso setzen wir an der Diagonalen e ein solches Dreieck auf.



Anwendung im Viereck

Nun wenden wir den Hilfssatz einerseits für das Dreieck ABC und andererseits für das Dreieck ACD an. Daraus ergibt sich, dass die Vierecke $AA'B'E'$ und $AD'C'E'$ Parallelogramme sind. Daher ist auch das Viereck $A'B'C'D'$ ein Parallelogramm (vgl. [Haag 2003]). Die Seitenlängen dieses Parallelgramms entsprechen den Schenkellängen der den Diagonalen e und f aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecke.

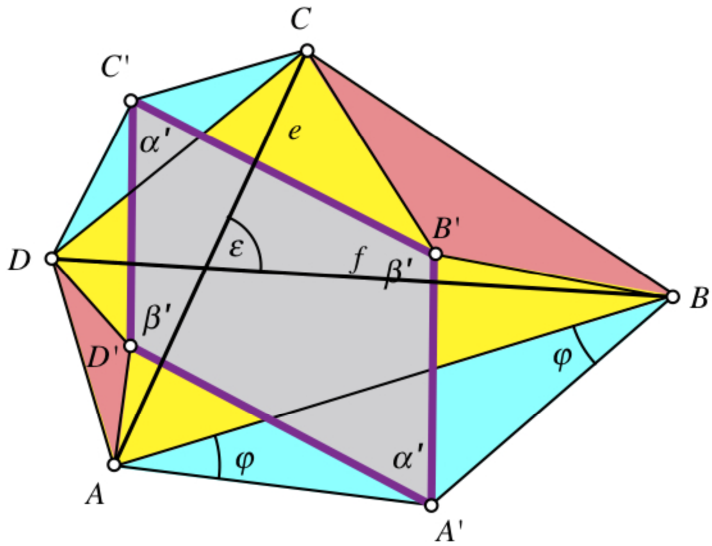


Parallelogramm

Die Seiten $A'B'$ und $C'D'$ sind parallel zu der um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn gedrehten Diagonalen e. Analog können wir einsehen, dass die Seiten $B'C'$ und $D'A'$ parallel sind zur der um den Winkel φ nun im Uhrzeigersinn gedrehten zweiten Diagonalen f. Den spitzen Schnittwinkel der beiden Diagonalen bezeichnen wir mit ε. Damit erhalten wir in unserem Parallelogramm $A'B'C'D'$ die folgenden Winkel:

$$\alpha' = 180° - \varepsilon - 2\varphi$$

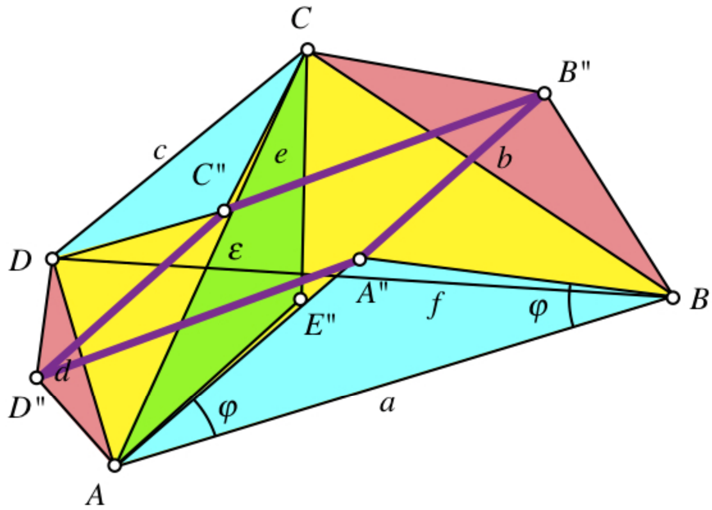
$$\beta' = \varepsilon + 2\varphi$$



Winkel

2.3 Zweites Parallelogramm

Nun vertauschen wir innen und außen beim Aufsetzen der gleichschenkligen Dreiecke. Wir erhalten ein Parallelogramm $A''B''C''D''$. Seine Seiten entsprechen den Schenkellängen der den Diagonalen e und f aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecke, sind also gleich lang wie die Seiten des Parallelogramms $A'B'C'D'$



Zweites Parallelogramm

Im Parallelogramm $A''B''C''D''$ haben wir aber die Winkel:

$$\alpha'' = 180° - \varepsilon + 2\varphi$$
$$\beta'' = \varepsilon - 2\varphi$$

Genau bei $\varepsilon = 90°$ haben wir:

$$\alpha' = 90° - 2\varphi = \beta''$$
$$\beta' = 90° + 2\varphi = \alpha''$$

Die beiden Parallelogramme sind kongruent und zwar so, dass $\overline{A'C'} = \overline{B''D''}$ und $\overline{B'D'} = \overline{A''C''}$. Daraus folgt die Behauptung.

Literatur

[Haag 2003] Haag, Wilfried: *Wege zu geometrischen Sätzen*. Stuttgart: Klett 2003. ISBN 3-12-720120-6