Hans Walser, [20161123]

Viereck-Viertelung

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

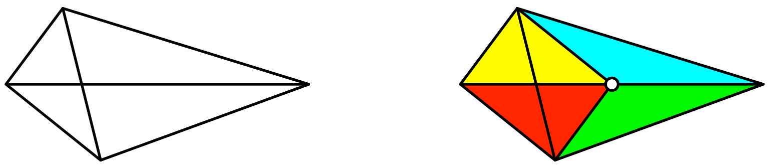
1 Problemstellung

Welche Vierecke lassen sich von einem inneren Punkt aus mit geraden Verbindungen zu den vier Ecken in vier flächengleiche Dreiecke zerlegen?

Triviale Lösungen sind Quadrat, Rechteck, Rhombus oder allgemein Parallelogramm mit dem Diagonalenschnittpunkt als innerem Punkt. Eine weitere Lösung ist das Drachenviereck mit dem Mittelpunkt der Symmetrieachse als innerem Punkt.

2 Der schiefe Drachen

Unter einem *schiefen Drachenviereck* verstehe ich ein affines Bild eines Drachenvierecks (Abb. 1). Eine der beiden Diagonalen wird durch die andere Diagonale halbiert.



a) b)

Abb. 1: Schiefer Drachen

Ein schiefer Drachen kann ausgehend vom Mittelpunkt derjenigen Diagonalen, welche die andere Diagonale halbiert, in vier flächengleiche Dreiecke zerlegt werden (Abb. 1b).

Die oben erwähnten trivialen Lösungen sind Sonderfälle von schiefen Drachen.

Wir werden sehen, dass das auch schon alles ist.

3 Theorem

Ein Viereck lässt sich genau dann von einem inneren Punkt aus mit geraden Verbindungen zu den vier Ecken in vier flächengleiche Dreiecke zerlegen, wenn es ein schiefes Drachenviereck ist.

Der Beweis in der einen Richtung ist einfach. Die vier Dreiecke in der Abbildung 1b haben gleich lange Grundlinien und gleich lange Höhen.

Für die andere Richtung ist zu zeigen: Ein Viereck, das von einem inneren Punkt aus mit geraden Verbindungen zu den vier Ecken in vier flächengleiche Dreiecke zerlegt werden kann, ist ein schiefes Drachenviereck. Dazu möchte ich etwas weiter ausholen.

4 Affine Invarianz

Die in unserem Theorem vorkommenden Begriffe und Methoden sind affin invariant.

Wir können daher ein beliebiges Viereck durch eine affine Abbildung in eine Standardsituation bringen wie folgt. Das Seitenmittenparallelogramm soll auf ein Quadrat der Seitenlänge 1 abgebildet werden.

Die beiden Diagonalen stehen dann orthogonal aufeinander und haben je die Länge 2. Das Viereck hat daher den Flächeninhalt 2.

Wir passen ein kartesisches Koordinatensystem mit den Achsen auf den beiden Diagonalen ein. Es sei $M(m,0)$ der Mittelpunkt der Diagonalen AC und $N(0,n)$ der Mittelpunkt der Diagonalen BD. Wegen der Diagonalenlänge 2 erhalten wir die Situation der Abbildung 2.

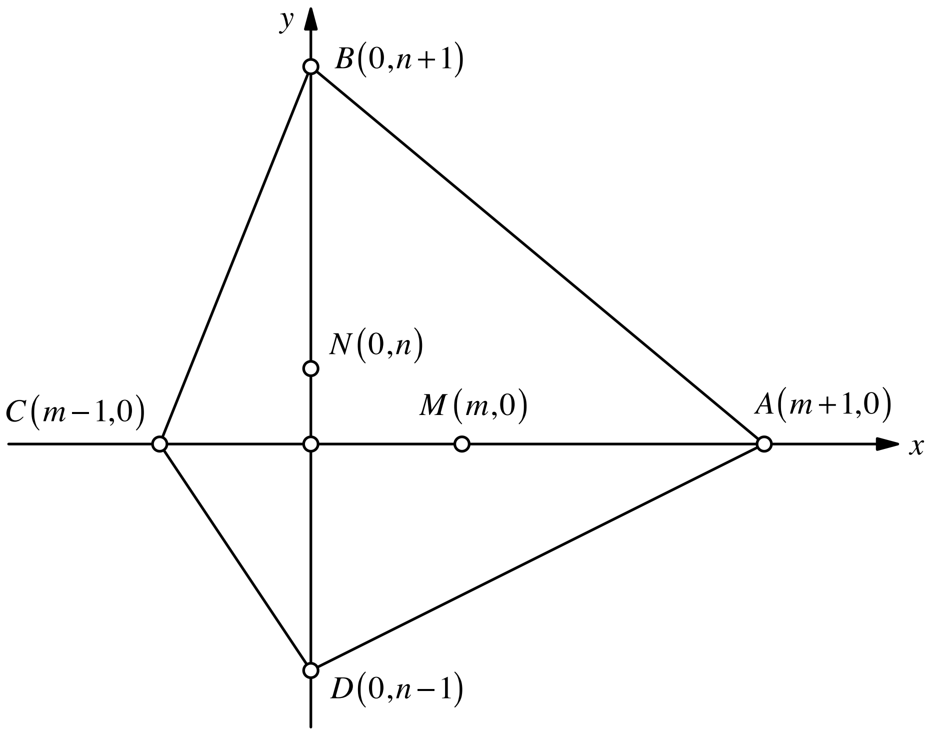


Abb. 2: Standardisierte Situation im Koordinatensystem

5 Flächenberechnungen

Da das ganze Viereck den Flächeninhalt 2 hat, müssen die Teildreiecke bei Flächengleichheit je den Flächeninhalt ½ haben.

Wir wählen nun einen Punkt $P(x,y)$ im Innern des Viereckes $ABCD$ und berechnen formal die Flächeninhalte der Teildreiecke.

$$\begin{aligned}\phi_{\Delta PAB} &= \tfrac{1}{2}\left(\det\left(\begin{bmatrix} x & m+1 \\ y & 0 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} m+1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 0 & x \\ n+1 & y \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(-y(m+1)+(m+1)(n+1)-x(n+1)\right)\end{aligned} \quad (1)$$

Analog:

$$\phi_{\Delta PBC} = \tfrac{1}{2}\left(x(n+1)-(m-1)(n+1)+y(m-1)\right) \quad (2)$$

$$\phi_{\Delta PCD} = \tfrac{1}{2}\left(-y(m-1)+(m-1)(n-1)-x(n-1)\right) \quad (3)$$

$$\phi_{\Delta PDA} = \tfrac{1}{2}\left(x(n-1)-(m+1)(n-1)+y(m+1)\right) \quad (4)$$

Die Flächeninhalte der Teildreiecke hängen linear von x und y ab.

Wir suchen eigentlich Punkte $P(x,y)$, für welche die vier Flächeninhalte (1) bis (4) gleich sind. Vorerst aber ein etwas einfacheres Problem.

6 Alternierende Flächensumme null

Wir suchen vorerst Punkte $P(x,y)$ für welche gilt:

$$\phi_{\Delta PAB} - \phi_{\Delta PBC} + \phi_{\Delta PCD} - \phi_{\Delta PDA} = 0 \quad (5)$$

Einsetzen von (1) bis (4) in (5) gibt:

$$nx + my = mn \quad (6)$$

Das ist die Gleichung der Geraden g, welche durch $M(m,0)$ und $N(0,n)$ verläuft.

Für einen beliebigen Punkt P auf dieser Geraden g erhalten wir also vier Dreiecke, deren alternierende Flächensumme verschwindet. Das gilt nicht nur im standardisierten Fall sondern auch im allgemeinen Viereck (Abb. 3). Die Flächensumme der roten Dreiecke ist gleich der Flächensumme der hellblauen Dreiecke.

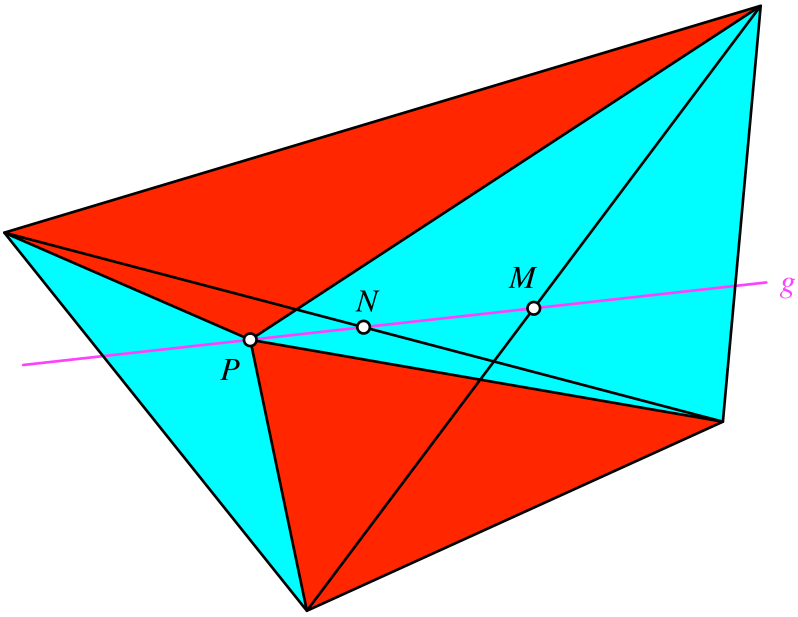


Abb. 3: Rot = Hellblau

Dieses Resultat ist der Satz von ANNE (Humenberger und Schuppar 2016). Die Gerade g wird als *NEWTONgerade* bezeichnet.

Der Satz von Anne liefert zwar nicht vier flächengleiche Teildreiecke, aber immerhin zwei Paare je gegenüberliegender Teildreiecke, deren paarweisen Flächensummen gleich sind.

Das heißt aber, dass für unsere Fragestellung nach vier flächengleichen Teildreiecken der Punkt P, falls er überhaupt existiert, auf der Geraden g liegen muss.

7 Flächengleiche Teildreiecke

Aus der Bedingung

$$\phi_{\Delta PAB} = \phi_{\Delta PBC} \tag{7}$$

erhalten wir durch Einsetzen von (1) und (2):

$$x(n+1) + ym = mn + m \tag{8}$$

Subtraktion von (6) liefert:

$$x = m \tag{9}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung bezüglich m.

Erster Fall: $m \neq 0$

In diesem Fall ist wegen (6) $y = 0$, das heißt $P = M$. Wegen $\phi_{\Delta PAB} = \frac{1}{2}$ erhalten wir durch Einsetzen der Werte $x = m$ und $y = 0$ in (1) die Bedingung $n = 0$. Der Punkt N ist also der Ursprung und das standardisierte Viereck $ABCD$ ein Drachenviereck mit der x-Achse als Symmetrieachse. Das ursprüngliche Viereck ist ein schiefes Drachenviereck.

Zweiter Fall: $m = 0$

Der Punkt M ist der Ursprung. Wegen (9) ist $x = 0$ und wegen (6) $y = n$, das heißt $P = N$. Das standardisierte Viereck ist ein Drachenviereck mit der y-Achse als Symmetrieachse, das ursprüngliche Viereck ein schiefes Drachenviereck.

Damit ist das Theorem in beiden Richtungen bewiesen.

Literatur

Humenberger, Hans und Schuppar, Berthold (2016): Flächenausgleich bei Weiß und Grau in Vierecken – der Satz von ANNE und sein Umfeld. MU, Der Mathematikunterricht. Jahrgang 62. Heft 5-2016. S. 26-36.