Hans Walser, [20210720]

Vielecke einpacken

0 Worum geht es?

Regelmäßige Vielecke sollen von regelmäßigen Vielecken eingepackt werden.

1 Beispiele

Ein gleichseitiges Dreieck kann von drei regelmäßigen Zwölfecken eingepackt werden, ein Quadrat von vier regelmäßigen Achtecken (Abb. 1).

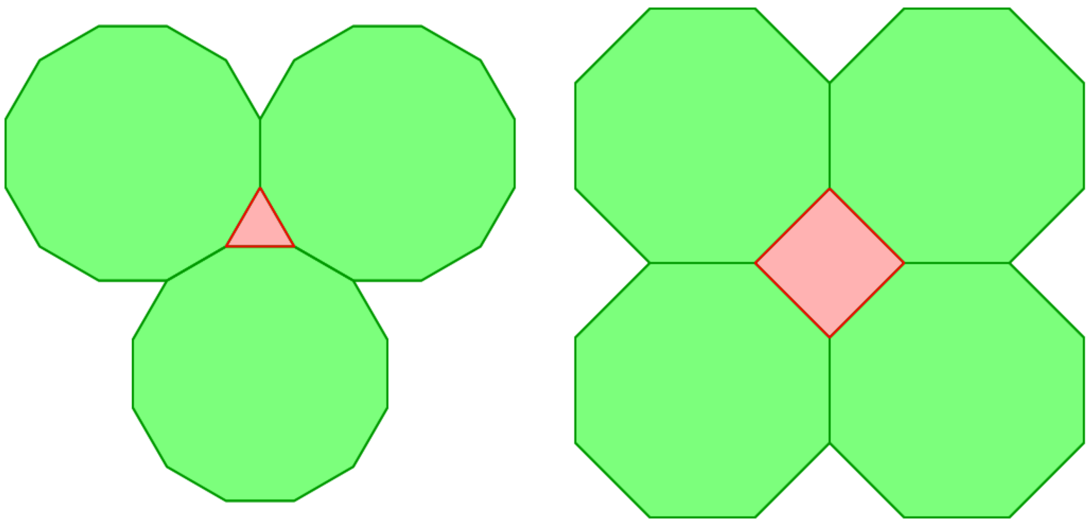

Abb. 1: Eingepacktes Dreieck und eingepacktes Viereck

Gibt es weitere Beispiele?

Experimentell finden wir noch zwei weitere Beispiele (Abb. 2).

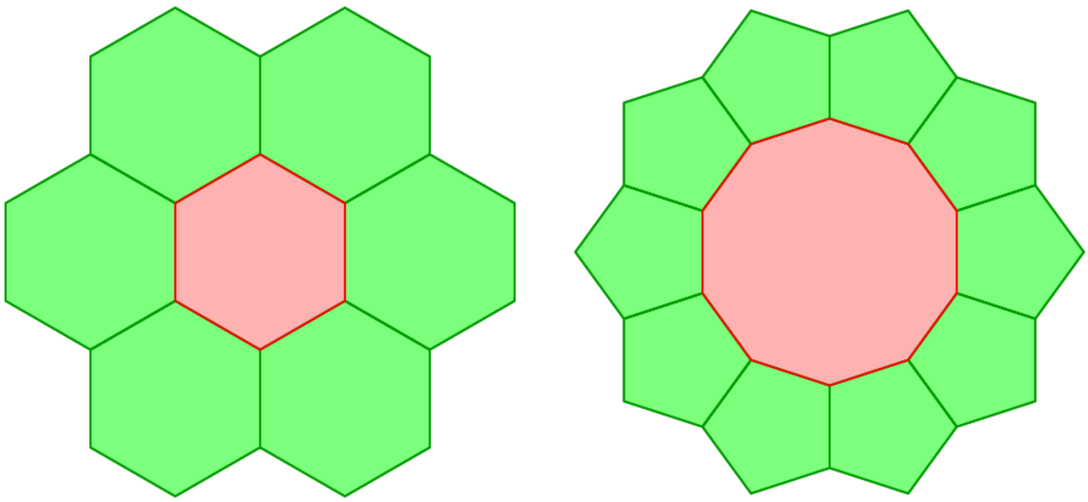

Abb. 2: Sechseck und Zehneck

Weitere Beispiele scheint es nicht zu geben.

2 Bearbeitung

Wir wollen ein regelmäßiges n-Eck einpacken. Es hat den Außenwinkel α:

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \tag{1}$$

Somit erhalten wir für den Innenwinkel β eines Verpackungsvieleckes:

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{2\pi}{n}\right) = \pi\frac{n+2}{2n} \tag{2}$$

Der Außenwinkel γ des Verpackungsvieleckes und damit sein Zentriwinkel ist:

$$\gamma = \pi - \beta = \pi\frac{n-2}{2n} \tag{3}$$

Daraus ergibt sich für die Eckenzahl e_n des Verpackungsvieleckes:

$$e_n = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{4n}{n-2} \qquad (4)$$

Die Tabelle 1 gibt die ersten Werte für e_n.

n	e_n	e_n
3	12	12
4	8	8
5	20/3	6.666666667
6	6	6
7	28/5	5.6
8	16/3	5.333333333
9	36/7	5.142857143
10	5	5
11	44/9	4.888888889
12	24/5	4.8
13	52/11	4.727272727
14	14/3	4.666666667
15	60/13	4.615384615
16	32/7	4.571428571
17	68/15	4.533333333
18	9/2	4.5
19	76/17	4.470588235
20	40/9	4.444444444
21	84/19	4.421052632

n	e_n	e_n
22	22/5	4.4
23	92/21	4.380952381
24	48/11	4.363636364
25	100/23	4.347826087
26	13/3	4.333333333
27	108/25	4.32
28	56/13	4.307692308
29	116/27	4.296296296
30	30/7	4.285714286
31	124/29	4.275862069
32	64/15	4.266666667
33	132/31	4.258064516
34	17/4	4.25
35	140/33	4.242424242
36	72/17	4.235294118
37	148/35	4.228571429
38	38/9	4.222222222
39	156/37	4.216216216
40	80/19	4.210526316

Tab. 1: Eckenzahlen der Verpackungsvielecke

Für n = 3, 4, 6 und 10 ergeben sich die schon bekannten Eckenzahlen der Abbildungen 1 und 2.

Die Folge e_n ist monoton abnehmend mit dem Grenzwert 4. Daher gibt es keine weiteren ganzzahligen Lösungen für das Verpackungsvieleck mehr. Zwischen e_{10} = 5 und dem Grenzwert 4 gibt es keine weiteren ganzen Zahlen. Basta

3 Sterne

In der zweiten Spalte der Tabelle 1 ist e_n als gekürzter Bruch angegeben. Zum Beispiel ist $e_5 = 20/3$. Wir können diesen Bruch als Stern interpretieren. Auf einem Kreis werden 20 Punkte regelmäßig verteilt. Wir starten in einem Punkt und gehen weiter zum dritten Punkt. Und so weiter jeweils zum drittnächsten Punkt. So entsteht ein Stern (Abb. 3).

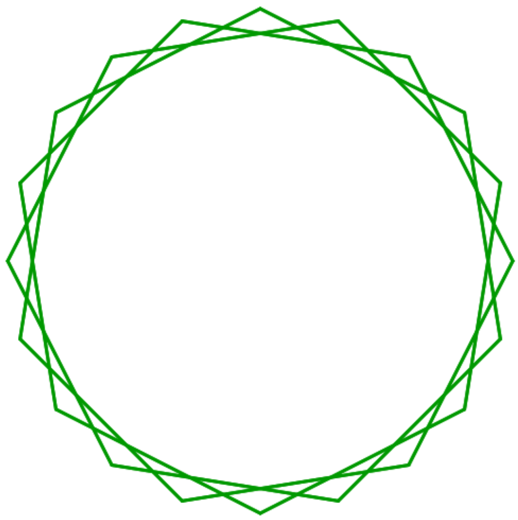

Abb. 3: Der 20/3-Stern

Wenn wir solche Sterne als Verpackungsvielecke zulassen, ergibt sich auch für n = 5 eine Lösung (Abb. 4).

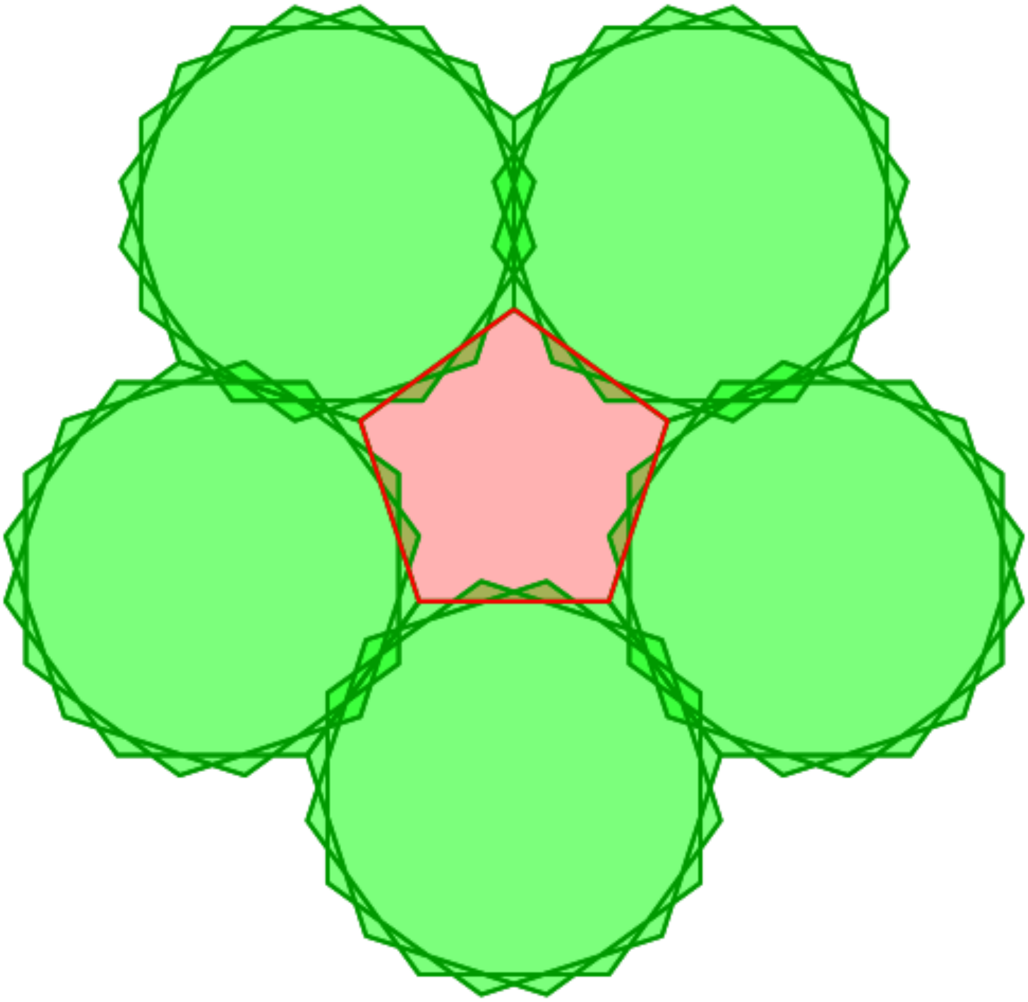

Abb. 4: Verpacktes Fünfeck

Analog können wir nun jedes regelmäßige Vieleck verpacken. Die Abbildung 5 zeigt das Beispiel des 18-Ecks mit 9/2-Sternen als Verpackungsmaterial.

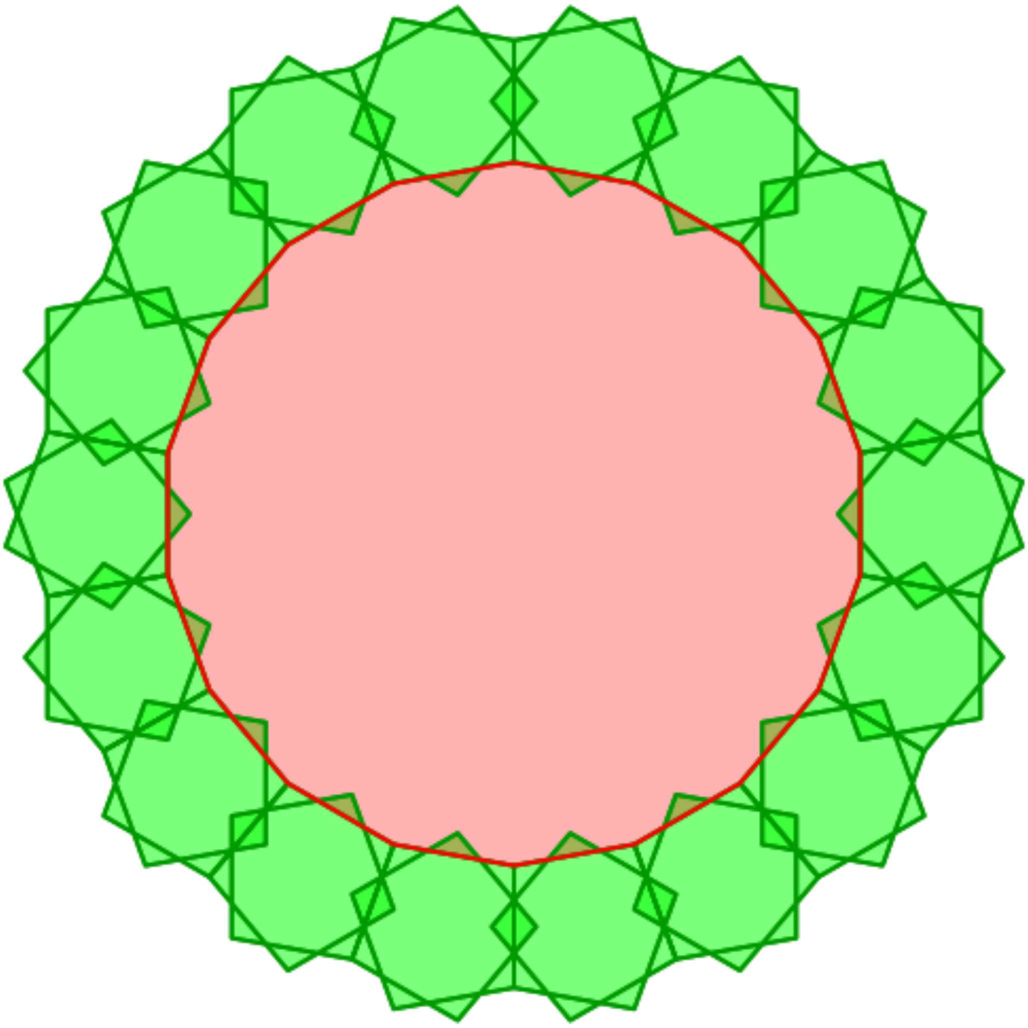

Abb. 5: 18-Eck und 9/2-Sterne