Hans Walser, [20071007b]

Versagen der Formel von Binet

1 Worum es geht

Für eine Fibonacci-Folge mit der Rekursion

$$a_{n+2} = 2pa_{n+1} + qa_n, \quad p,q \in \mathbb{C}$$

und Startwerten a_0 und a_1 gilt mit den Hilfsgrößen

$$\gamma_1 = p + \left(p^2 + q\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } \gamma_2 = p - \left(p^2 + q\right)^{\frac{1}{2}}$$

die explizite Formel von Binet:

$$a_n = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2}\left(\left(a_1 - a_0\gamma_2\right)\gamma_1^n + \left(a_0\gamma_1 - a_1\right)\gamma_2^n\right)$$

Dies kann induktiv bewiesen werden.

Wegen der Differenz $\gamma_1 - \gamma_2 = 2\left(p^2 + q\right)^{\frac{1}{2}}$ im Nenner versagt diese Formel für den Fall:

$$p^2 + q = 0$$

$$q = -p^2$$

Die Rekursionsformel hat in diesem Fall die Form:

$$a_{n+2} = 2pa_{n+1} - p^2 a_n, \quad p \in \mathbb{C}$$

2 Beispiele

In den folgenden Beispielen ist jeweils $|p| = 1$.

2.1 Arithmetische Folge

Für $p = 1$ erhalten wir die Rekursion $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Diese liefert mit den Startwerten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$:

```
a[0] = 0
a[1] = 1
a[2] = 2
a[3] = 3
a[4] = 4
a[5] = 5
a[6] = 6
a[7] = 7
```

Wir erhalten die natürlich Zahlen.

Mit den allgemeinen Startwerten $a_0 = f$ und $a_1 = g$ ergibt sich:

```
a[0] = f
a[1] = g
a[2] = 2*g - f
a[3] = 3*g - 2*f
a[4] = 4*g - 3*f
```

```
a[5] = 5*g - 4*f
a[6] = 6*g - 5*f
a[7] = 7*g - 6*f
```

Wir erhalten eine arithmetische Folge mit der Rekursion:

$$a_{n+1} = a_n + a_1 - a_0$$

2.2 Zwei arithmetische Folgen

Für $p = -1$ erhalten wir die Rekursion $a_{n+2} = -2a_{n+1} - a_n$. Diese liefert mit den Startwerten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$:

```
a[0] = 0
a[1] = 1
a[2] = -2
a[3] = 3
a[4] = -4
a[5] = 5
a[6] = -6
a[7] = 7
```

Die Folge mit den geraden Indizes und die Folge mit den ungeraden Indizes bilden je eine arithmetische Folge.

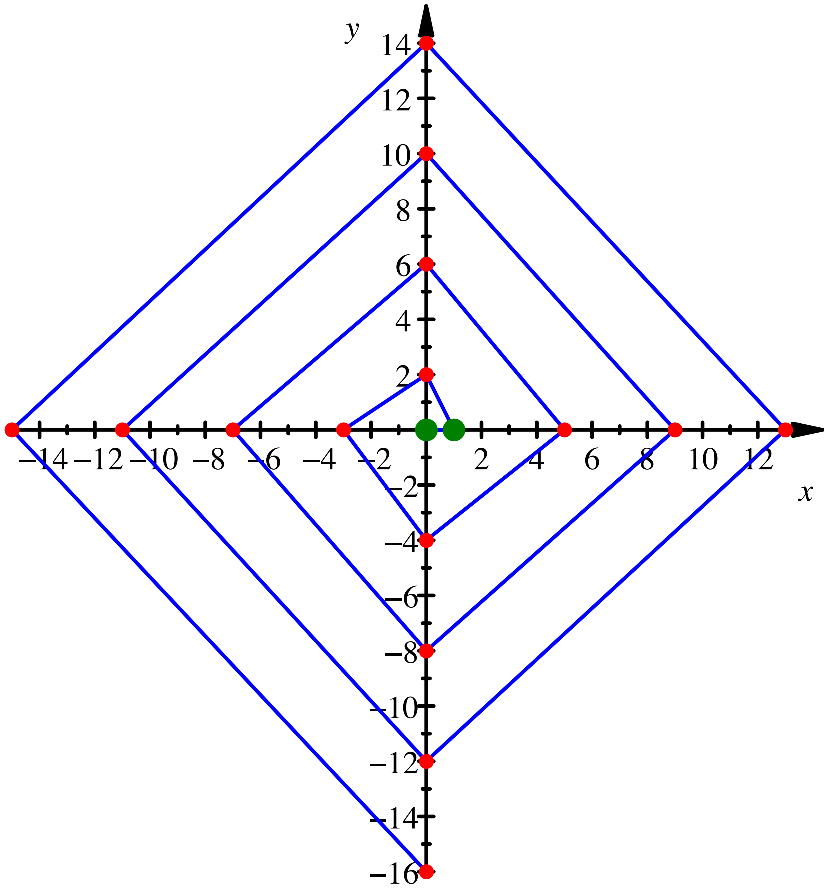
2.3 Vier arithmetische Folgen und eine archimedische Spirale

Für $p = \mathrm{i}$ erhalten wir die Rekursion $a_{n+2} = 2\mathrm{i}a_{n+1} + a_n$. Diese liefert mit den Startwerten $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$:

```
a[0] = 0
a[1] = 1
a[2] = 2*I
a[3] = -3
a[4] = -4*I
a[5] = 5
a[6] = 6*I
a[7] = -7
a[8] = -8*I
a[9] = 9
a[10] = 10*I
a[11] = -11
a[12] = -12*I
a[13] = 13
a[14] = 14*I
a[15] = -15
a[16] = -16*I
```

Die vier Teilfolgen $\{a_0, a_4, a_8, \ldots\}$, $\{a_1, a_5, a_9, \ldots\}$, $\{a_2, a_6, a_{10}, \ldots\}$ und $\{a_3, a_7, a_{11}, \ldots\}$ mit je konstanten Indizes modulo 4 bilden je eine arithmetische Folge.

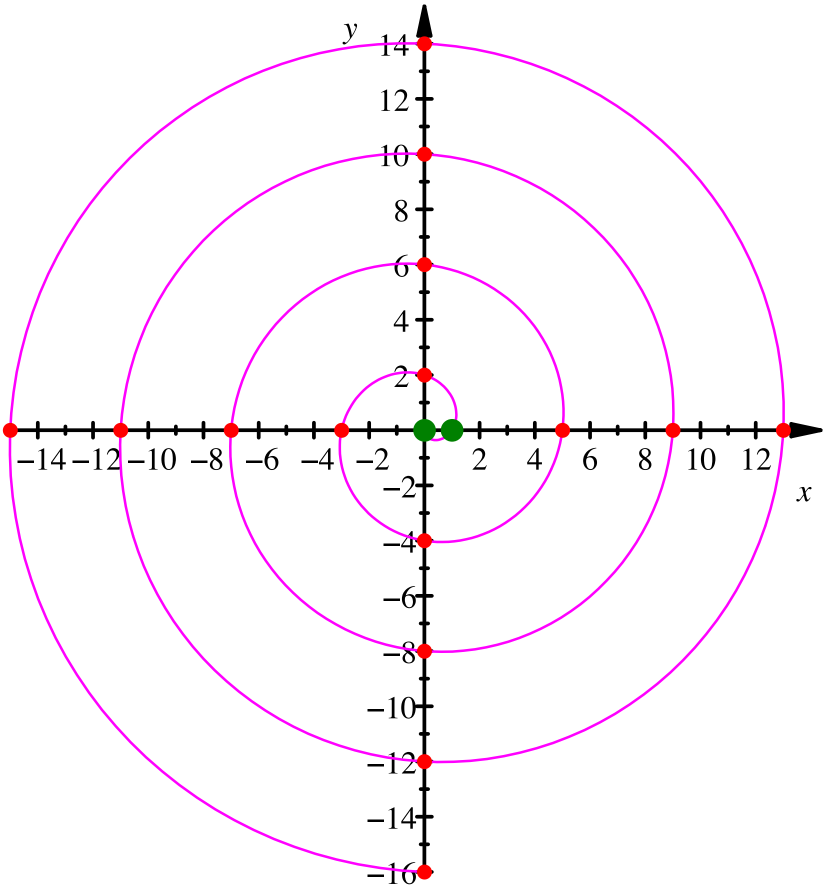
In der komplexen Ebene sieht das so aus:



In der komplexen Ebene

Keine zwei Seiten des Polygonszuges sind parallel, auch wenn man das zunächst vermutet. Hingegen liegen die Punkte auf der archimedischen Spirale:

$$r(\phi) = \frac{\phi}{\frac{\pi}{2}} + 1, \quad \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \infty\right[$$



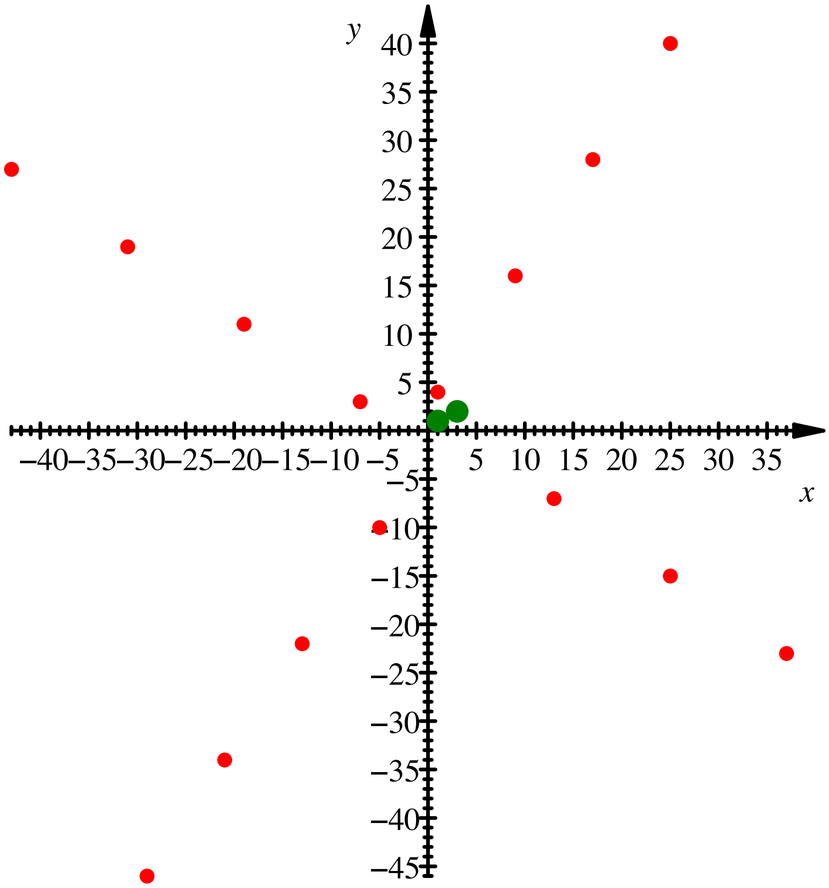
Archimedische Spirale

Mit den allgemeinen Startwerten $a_0 = f$ und $a_1 = g$ erhalten wir:

```
a[0] = f
a[1] = g
a[2] = f + 2*I*g
a[3] = 2*I*f - 3*g
a[4] = - 3*f - 4*I*g
a[5] = 5*g - 4*I*f
a[6] = 5*f + 6*I*g
a[7] = 6*I*f - 7*g
a[8] = - 7*f - 8*I*g
a[9] = 9*g - 8*I*f
a[10] = 9*f + 10*I*g
a[11] = 10*I*f - 11*g
a[12] = - 11*f - 12*I*g
a[13] = 13*g - 12*I*f
a[14] = 13*f + 14*I*g
a[15] = 14*I*f - 15*g
a[16] = - 15*f - 16*I*g
```

Die vier Teilfolgen $\{a_0, a_4, a_8, \ldots\}$, $\{a_1, a_5, a_9, \ldots\}$, $\{a_2, a_6, a_{10}, \ldots\}$ und $\{a_3, a_7, a_{11}, \ldots\}$ mit je konstanten Indizes modulo 4 bilden wiederum je eine arithmetische Folge.

Für die Startwerte $a_0 = 3 + 2\mathrm{i}$ und $a_1 = 1 + \mathrm{i}$ ergibt sich:

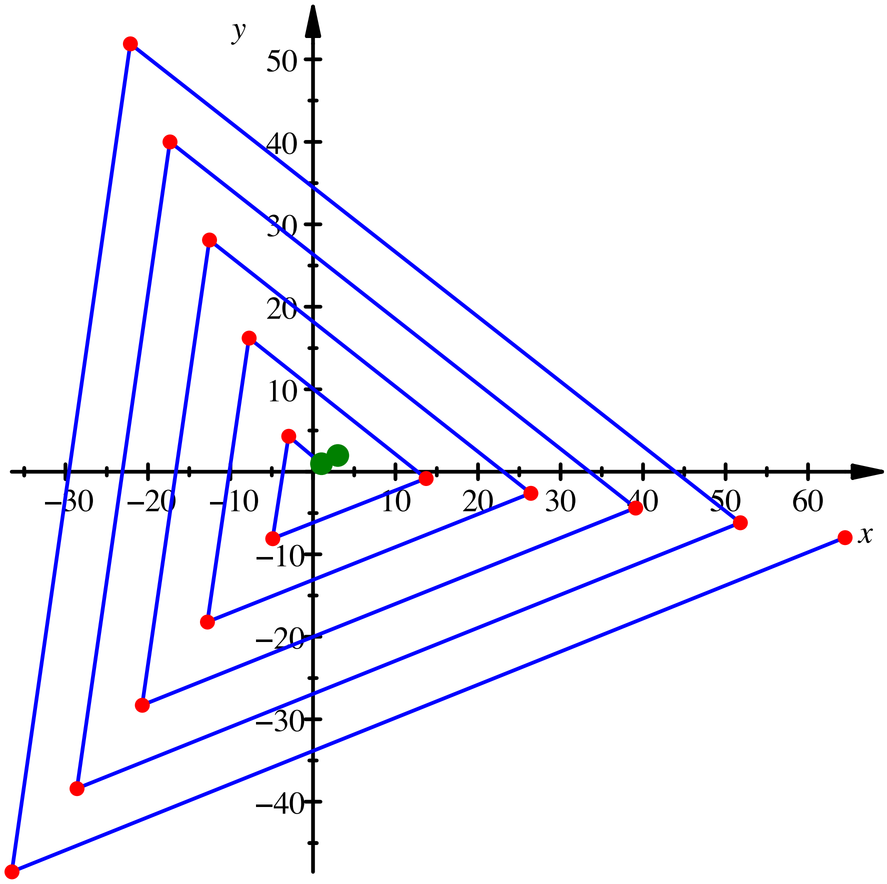


Vier arithmetische Folgen

Wir sehen wieder die vier „orthogonalen" arithmetischen Folgen.

2.4 Drei arithmetische Folgen

Für $p = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ liefert das Programm mit den Startwerten $a_0 = 3 + 2i$ und $a_1 = 1 + i$:

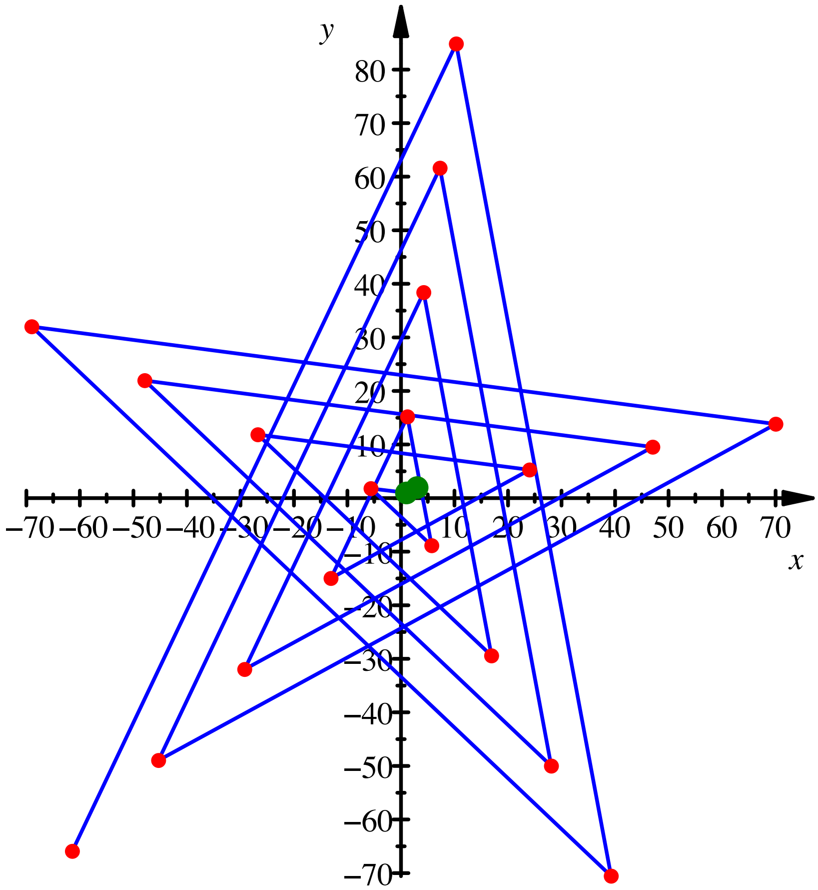


Drei arithmetische Folgen

2.5 Eine Vermutung

Wir vermuten, dass sich für $p = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{m}\mathrm{i}}$ entsprechend m arithmetische Folgen ergeben.

Interessant ist folgendes: Für $m = \frac{5}{2}$ ergibt sich:



Fünf arithmetische Folgen in hinkender Anordnung