Hans Walser, [20210207]

Varignon

1 Worum geht es?

Variante zum Satz von Varignon. Ähnliche Rhomben

2 Der Satz von Varignon

Der Satz von Varignon besagt, dass das Seitenmittenviereck eines beliebigen Viereckes ein Parallelogramm ist (Abb. 1).

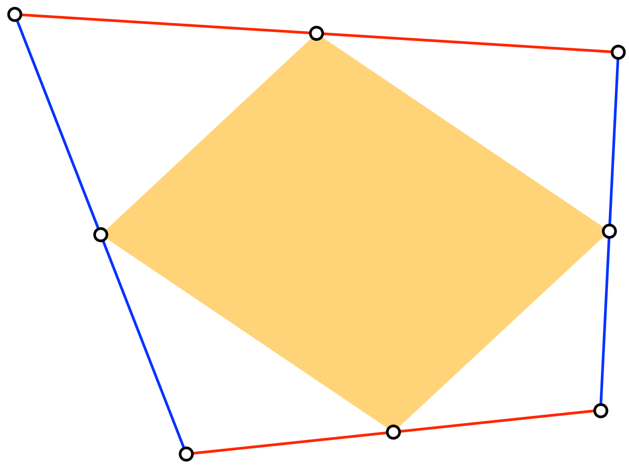

Abb. 1: Parallelogramm von Varignon

3 Viereck aus Rhomben

Wir bauen ein Viereck aus ähnlichen Rhomben (Abb. 2).

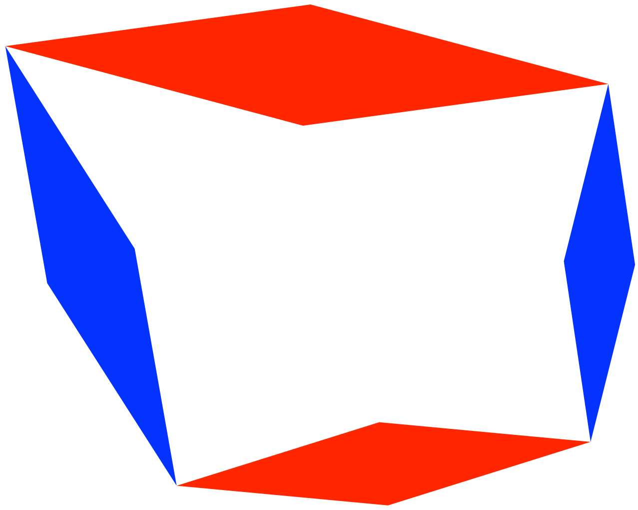

Abb. 2: Viereck aus Rhomben

Wir können auf zwei Arten ein Parallelogramm einpassen (Abb. 3).

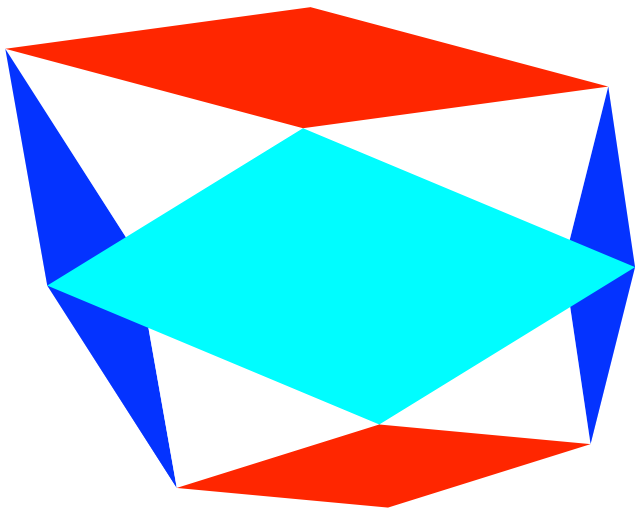

Abb. 3.1: Erstes Parallelogramm

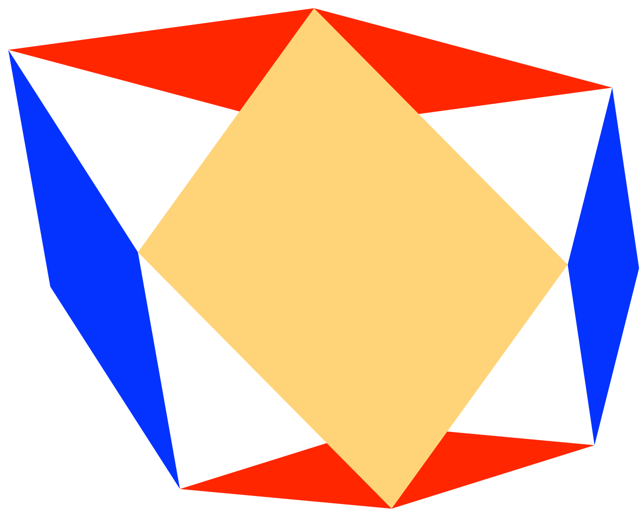

Abb. 3.2: Zweites Parallelogramm

4 Beweis

Rechnerische Beweise.

Die Ähnlichkeit der Rhomben wird durch das Diagonalenverhältnis v definiert.

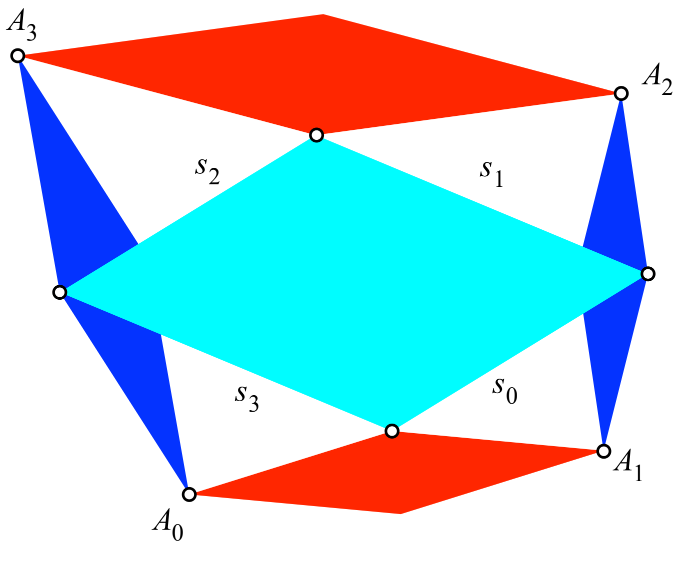

Abb. 4.1: Bezeichnungen für die erste Lösung

Wir setzen:

$$A_0 = (x_0, y_0) \quad , \quad A_1 = (x_1, y_1) \quad , \quad A_2 = (x_2, y_2) \quad , \quad A_3 = (x_3, y_3) \qquad (1)$$

Damit erhalten wir für die Seitenlängen des eingepassten Viereckes:

$$\begin{aligned}
s_0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}\\
s_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}\\
s_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{(x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2}\\
s_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}
\end{aligned} \qquad (2)$$

Je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich lang. Die erste Lösung (Abb. 4.1) also ist ein Parallelogramm.

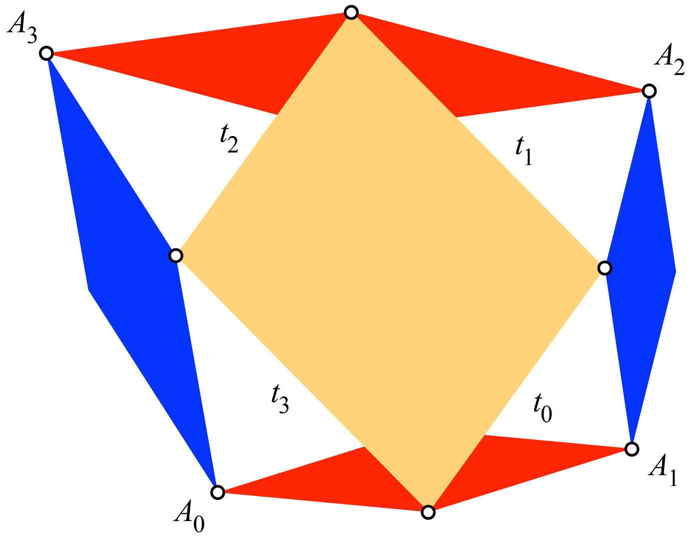

Abb. 4.2: Zweite Lösung

Für die zweite Lösung (Abb. 4.2) erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
t_0 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{\left(x_0-x_2\right)^2+\left(y_0-y_2\right)^2}\\
t_1 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{\left(x_1-x_3\right)^2+\left(y_1-y_3\right)^2}\\
t_2 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{\left(x_0-x_2\right)^2+\left(y_0-y_2\right)^2}\\
t_3 &= \tfrac{1}{2}\sqrt{v^2+1}\sqrt{\left(x_1-x_3\right)^2+\left(y_1-y_3\right)^2}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Wir haben ebenfalls ein Parallelogramm.

Die beiden Parallelogramme haben dieselben Seitenlängen. Ihre Winkel sind aber unterschiedlich.

Die Seitenlängen sind bis auf den Faktor $\sqrt{v^2+1}$ die halben Diagonalenlängen des Startviereckes. Für $v = 0$ erhalten wir den klassischen Satz von Varignon.

5 Sonderfall

Für $v = 1$ sind die Rhomben Quadrate (Abb. 5).

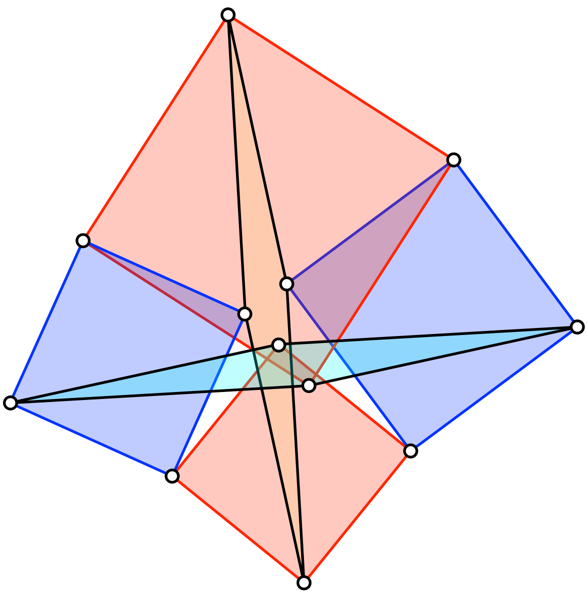

Abb. 5: Sonderfall Quadrate

In diesem Sonderfall sind die beiden Parallelogramme kongruent (Beweis rechnerisch).

Website

Hans Walser: Rhomben
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/R/Rhomben3/Rhomben3.htm