Hans Walser, [20150912]

Unterteilung des Tangentenvierecks

Anregung: M. M., O.

1 Worum geht es?

Die Triangulation eines Tangentenvierecks führt zu speziellen Berührungspunkten der Inkreise der Teildreiecke.

2 Beliebiges Viereck

Zunächst zerlegen wir ein beliebiges Viereck mit einer Diagonalen in zwei Dreiecke und zeichnen in jedem Teildreieck den Inkreis. Die beiden Inkreise berühren die Diagonale in der Regel in verschiedenen Punkten (Abb. 1).

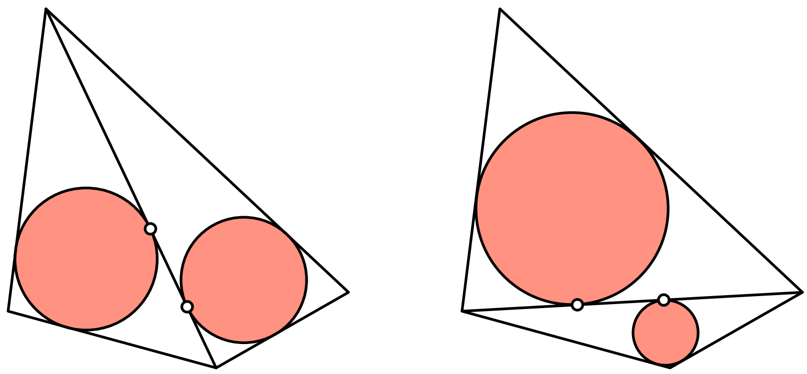

Abb. 1: Inkreise in Teildreiecken

Wir vermuten, dass die Distanz zwischen den beiden Berührungspunkten unabhängig davon ist, mit welcher Diagonalen wir das Viereck unterteilt haben.

Zur Berechnung dieser Distanz Δ verwenden wir die Bezeichnungen der Abbildung 2.

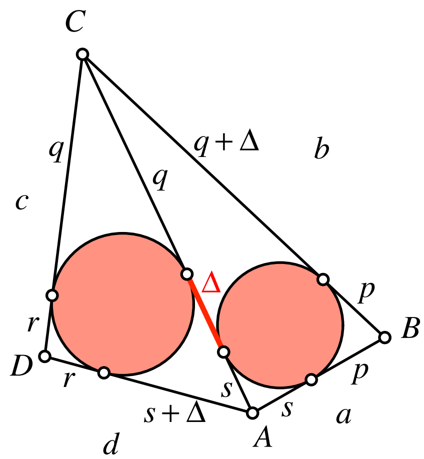

Abb. 2: Bezeichnungen

Wir berechnen die alternierende Seitensumme des Viereckes *ABCD*:

$$a-b+c-d=(s+p)-(p+q+\Delta)+(q+r)-(r+s+\Delta)=-2\Delta \qquad (1)$$

Somit ist:

$$\Delta=\tfrac{1}{2}|a-b+c-d| \qquad (2)$$

Die Distanz Δ ist also unabhängig von der zur Unterteilung gewählten Diagonalen.

3 Tangentenviereck

In einem Tangentenviereck ist die alternierende Seitensumme null. Daher ist auch $\Delta=0$, und die beiden Inkreise in den Teildreiecken haben den Berührungspunkt mit der Diagonalen gemeinsam (Abb. 3).

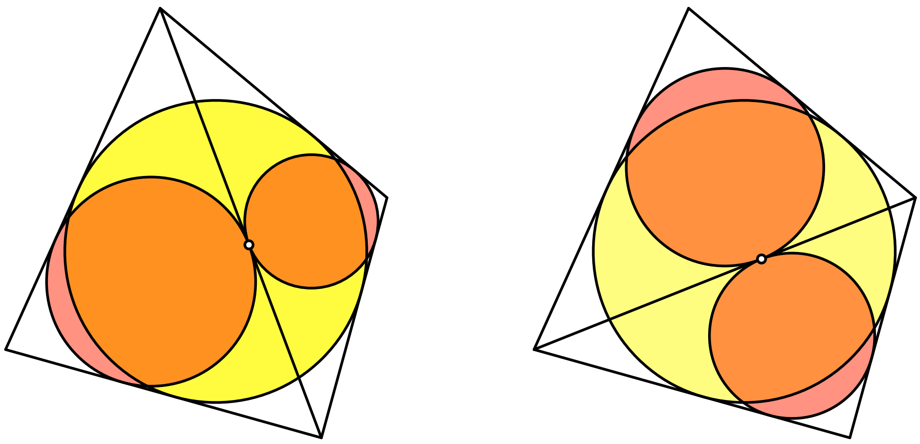

Abb. 3: Tangentenviereck

4 Umgekehrte Sicht

Wir beginnen mit zwei sich berührenden Kreisen und wählen auf der gemeinsamen Tangente im Berührungspunkt zwei Punkte. Von diesen Punkten aus zeichnen wir je die anderen Tangenten an die beiden Kreise und erhalten so ein Tangentenviereck (Abb. 4).

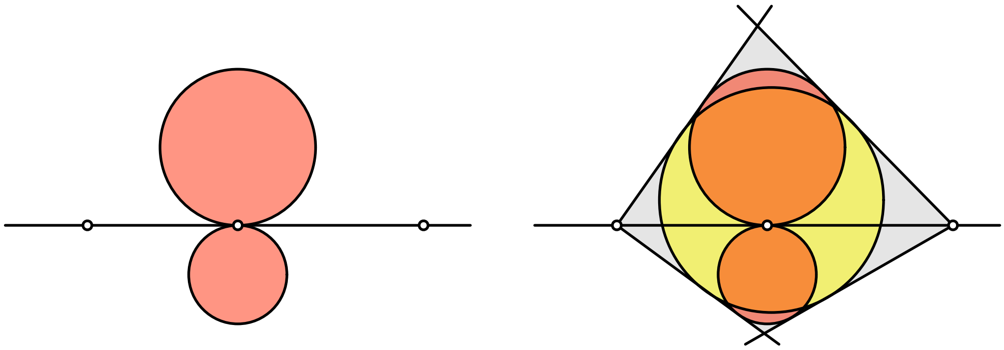

Abb. 4: Konstruktion eines Tangentenviereckes

Werden die beiden Punkte auf der gleichen Seite gewählt, ergibt sich ein nicht konvexes Viereck mit Ankreis (Abb. 5). Da der Ankreis auch alle vier Seitengeraden des Viereckes berührt, kann das Viereck ebenfalls als Tangentenviereck bezeichnet werden.

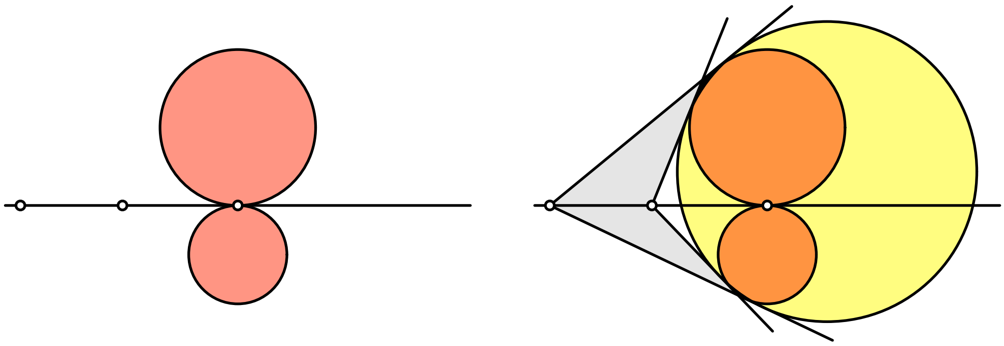

Abb. 5: Ankreis

In einem nicht konvexen Tangentenviereck ist die doppelt alternierende Seitensumme null. Dazu die Bezeichnungen der Abbildung 6.

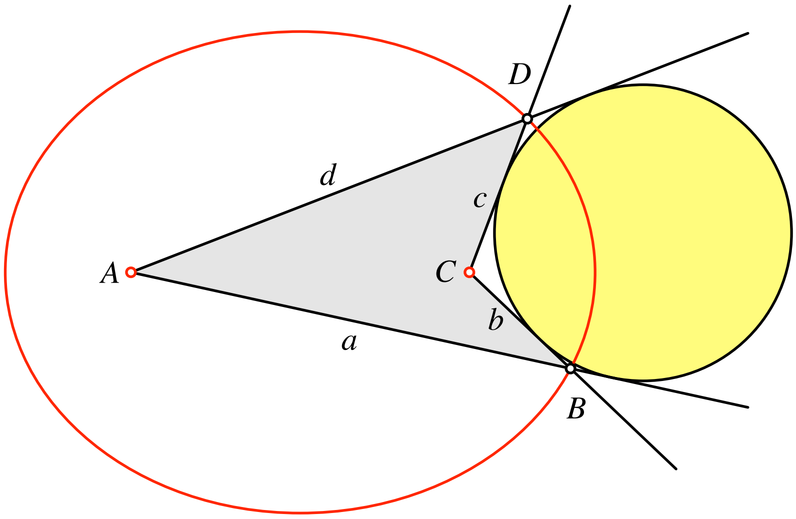

Abb. 6: Nicht konvexes Tangentenviereck

Es ist:

$$(a+b)-(c+d)=0 \tag{3}$$

Das heißt aber, dass die Punkte B und D auf derselben Ellipse mit den Brennpunkten A und C liegen.

Schließlich können wir die beiden Kreise ineinander zeichnen (Abb. 7 und 8).

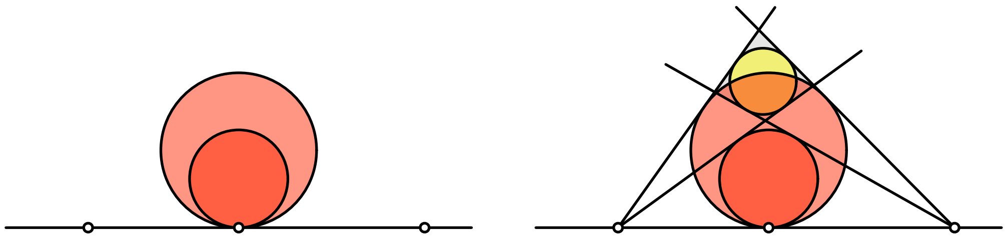

Abb. 7: Kreise berühren sich von innen

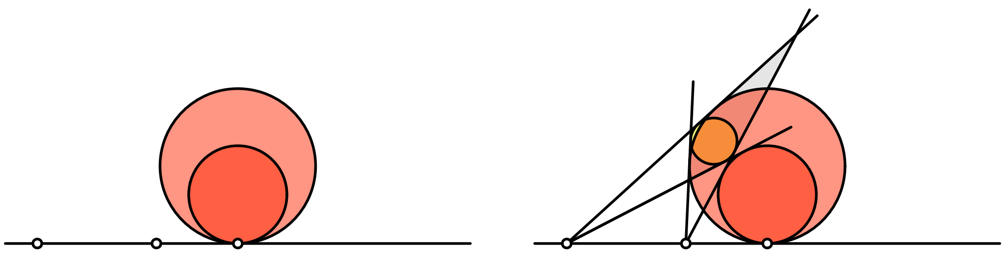

Abb. 8: Kreise berühren sich von innen