Hans Walser, [20160916], [20161009]

Unmögliche pythagoreische Dreiecke

Ideen: Chr. Z., B.

1 Schwarze Quadrate

Woher kommen die beiden schwarzen Quadrate?

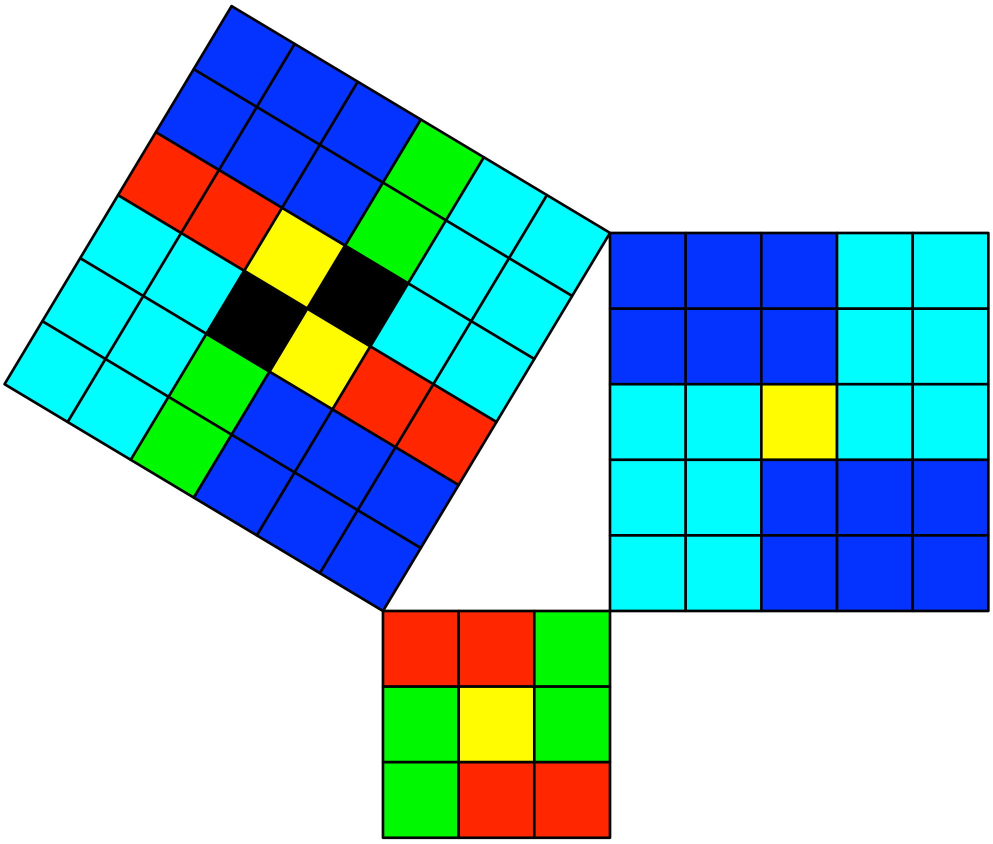

Abb. 1: Woher kommen die schwarzen Quadrate?

2 Sachverhalt

Es gibt kein pythagoreisches Dreieck mit ungeraden Kathetenlängen a und b.
In höheren Dimensionen sieht das unterschiedlich aus.

3 Beweis

Wir können den Beweis auf zwei Arten darstellen.

3.1 Modulo 4

Sei $a = 2m + 1$ und $b = 2n + 1$. Dann ist:

$$a^2 + b^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4\left(m^2 + m + n^2 + n\right) + 2 \qquad (1)$$

Es ist also $a^2 + b^2 \equiv 2 \bmod 4$. Das kann keine Quadratzahl sein, da Quadratzahlen bei Division durch 4 nur die Reste 0 (gerade Quadratzahl) oder 1 (ungerade Quadratzahl) haben können.

3.2 Halbzahligkeit

Wir können den Beweis auch führen, indem wir die beteiligten Zahlen halbieren. Die Katheten a und b sind dann echt halbzahlig. In der Dezimaldarstellung enden sie auf „Punkt fünf“. Ihre Quadrate enden auf Punkt zwei fünf, die Summe der Quadrate auf Punkt fünf. Dies ist weder das Quadrat einer ganzen Zahl noch das Quadrat einer echten Halbzahl.

4 Im Raum

Das räumliche Analogon zum rechtwinkligen Dreieck ist das Orthoschem (Abb. 2).

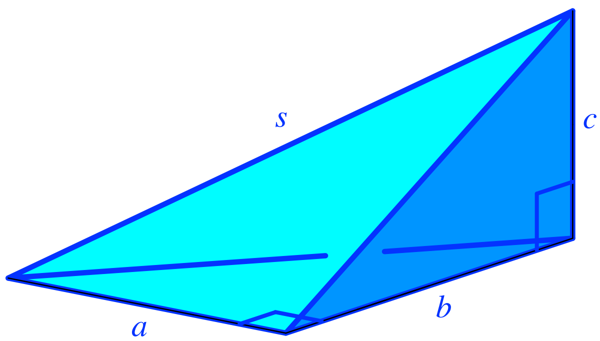

Abb. 2: Orthoschem

Das ist ein unregelmäßiges Tetraeder mit drei aufeinanderfolgenden paarweise senkrechten Kanten, die wir mit a, b, c bezeichnen. Für die längste Tetraederkante s gilt dann:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \qquad (2)$$

Wir haben nun einen zur Ebene analogen Sachverhalt:

Es gibt kein pythagoreisches Orthoschem mit ungeraden Kanten a, b, c und ganzzahligem s.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (2m+1)^2+(2n+1)^2+(2o+1)^2 \\ &= 4\left(m^2+m+n^2+n+o^2+o\right)+3 \end{aligned} \tag{3}$$

Das kann keine Quadratzahl sein.

5 Höhere Dimensionen

Im 4d-Raum ist es aber ganz anders. Das einfachste pythagoreische Orthoschem mit

$$a^2+b^2+c^2+d^2=s^2 \tag{4}$$

ergibt sich durch

$$1^2+1^2+1^2+1^2=2^2 \tag{5}$$

Die Tabelle 1 gibt einige weitere Lösungen.

a	b	c	d		s
1	1	1	1		2
3	3	3	3		6
5	3	1	1		6
5	5	5	5		10
7	5	5	1		10
7	7	1	1		10
7	7	7	7		14
9	3	3	1		10
9	9	5	3		14
9	9	9	9		18
11	5	5	5		14
11	7	5	1		14
11	11	9	1		18
11	11	11	11		22

Tab. 1: Im 4d-Raum

Für den 5d-Raum gibt es kein Beispiel. Um das einzusehen, müssen wir modulo 8 rechnen. Die ungeraden Zahlen haben bei Division durch 8 die Reste 1, 3, 5 oder 7. Ihre Quadrate haben bei Division durch 8 immer den Rest 1. Die Summe über die fünf

Quadratzahlen hat daher bei Division durch 8 den Rest 5 und kann keine Quadratzahl sein.

Für die Dimensionen 6 und 7 gibt es keine Lösungen. Der Ausschluss erfolgt analog zu den Dimensionen 2 und 3.

Für die Dimension 8 gibt es Lösungen. Die Tabelle 2 gibt einige Lösungen an.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*		*s*
3	1	1	1	1	1	1	1		4
3	3	3	3	3	3	3	1		8
5	3	3	3	3	1	1	1		8
5	5	3	1	1	1	1	1		8
5	5	5	5	5	3	3	1		12
7	3	1	1	1	1	1	1		8
7	5	5	3	3	3	3	3		12
7	5	5	5	3	3	1	1		12
7	7	3	3	3	3	3	1		12
7	7	5	3	3	1	1	1		12
7	7	7	5	5	5	5	3		16
7	7	7	7	5	5	3	1		16
7	7	7	7	7	3	1	1		16

Tab. 2: Im 8d-Raum

Für die Dimension 9 gibt es ebenfalls Lösungen (Tab. 3).

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*		*s*
1	1	1	1	1	1	1	1	1		3
3	3	1	1	1	1	1	1	1		5
3	3	3	3	3	1	1	1	1		7
3	3	3	3	3	3	3	3	3		9
5	3	3	1	1	1	1	1	1		7
5	3	3	3	3	3	3	1	1		9
5	5	3	3	3	1	1	1	1		9
5	5	5	1	1	1	1	1	1		9
5	5	5	3	3	3	3	3	1		11
5	5	5	5	3	3	1	1	1		11
5	5	5	5	5	5	3	3	1		13
5	5	5	5	5	5	5	5	5		15

Tab. 3: Im 9d-Raum

6 Allgemein

Zu gegebenem $n > 1$ suchen wir n ungerade Zahlen $u_1, \ldots, u_n$, deren Quadratsumme ebenfalls eine Quadratzahl ist:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = s^2, \quad s \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Wir formen etwas um. Mit $u_k = 2m_k - 1$ erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(2m_k - 1\right)_k^2 = 4\left(\sum_{k=1}^{n} m_k^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k \right) + n \tag{7}$$

Der Term (7) hat bei Division durch 4 denselben Rest wie n. Wir machen daher eine Fallunterscheidung je nach dem Rest von n bei Division durch 4.

6.1 *n* kongruent zu 0 modulo 4

In diesem Fall gibt es immer eine Lösung. Wir setzen $n = 4p$ und können mit den ungeraden Zahlen

$$u_1 = \cdots = u_{n-1} = 1, \quad u_n = 2p - 1 \tag{8}$$

arbeiten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k^2 &= \sum_{k=1}^{n-1} 1^2 + (2p-1)^2 = (n-1) + (2p-1)^2 \\ &= (4p-1) + \left(4p^2 - 4p + 1\right) = 4p^2 = (2p)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Die Tabellen 1 und 2 zeigen aber, dass es noch weitere Lösungen geben kann.

6.2 *n* kongruent zu 1 modulo 4

Wir machen eine Unterfallunterscheidung modulo 8. Zahlen, die kongruent zu 1 modulo 4 sind, sind modulo 8 kongruent zu 1 oder zu 5.

6.2.1 *n* kongruent zu 1 modulo 8

Wir zeigen, dass es zu n kongruent zu 1 modulo 8 immer eine Lösung gibt.

Wir schreiben:

$$n = 8m + 1, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

und:

$$m = \binom{p}{2} + q, \quad p = 1,2,3,\ldots, \quad q = 1,2,\ldots,p \tag{11}$$

Die Tabelle 4 illustriert, dass wir so tatsächlich alle benötigten Werte für m erhalten:

$p \setminus q$	1	2	3	4	5
1	1				
2	2	3			
3	4	5	6		
4	7	8	9	10	
5	11	12	13	14	15

Tab. 4: Werte für *m*

Nun wählen wir die ersten $p - q$ ungeraden Zahlen als 3, die restlichen als 1.
Zu zeigen ist:

$$(p-q)\cdot 3^2 + \big(n-(p-q)\big)\cdot 1^2 = s^2 \tag{12}$$

Für den Term links erhalten wir unter Einsetzen von (10) und (11):

$$\begin{aligned} 9(p-q)+\left(\left(8\left(\binom{p}{2}+q\right)+1\right)-(p-q)\right) &= 9p-9q+8\left(\tfrac{1}{2}p(p-1)+q\right)+1-p+q \\ &= 9p-9q+4p^2-4p+8q+1-p+q \\ &= 4p^2+4p+1=(2p+1)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

Somit ist der Term links ein Quadrat. Dies war zu zeigen.

6.2.2 *n* kongruent 5 modulo 8

Ist n kongruent zu 5 modulo 8, dann ist die Summe (7) kongruent zu n modulo 8, also kongruent zu 5 modulo 8. Dies kann keine Quadratzahl sein.

6.3 *n* kongruent zu 2 oder zu 3 modulo 4

Der Term (7) kann keine Quadratzahl sein, da Quadratzahlen bei Division durch 4 nur die Reste 0 oder 1 haben können.

7 Zusammenfassung

Lösungen gibt es genau für n kongruent zu 0 modulo 4 und für n kongruent 1 modulo 8.

Der Fall $n = 1$ ist trivial.

Zusammengefasst: Lösungen genau für n kongruent zu 0, 1 oder 4 modulo 8.

$$1, 4, 8, 9, 12, 16, 17, 20, 24, 25, 28, 32, 33, \ldots \tag{14}$$