

Hans Walser, [20200719]

## Umsechseck

Anregung: M. E., B.

### 1 Erinnerung: Kantenmittenviereck

Das Kantenmittenviereck eines beliebigen Vierecks ist ein Parallelogramm (Satz von Varignon). Umgekehrt gibt es zu einem gegebenen Parallelogramm unendlich viele passende Umvierecke.

### 2 Problemstellung

Wie ist es beim Sechseck?

### 3 Kantenmittensechseck

Dem Sechseck  $R_0R_1\dots R_5$  (Abb. 1a) wird das Kantenmittensechseck  $A_0A_1\dots A_5$  einbeschrieben (Abb. 1b).

Welche Eigenschaften hat das Kantenmittensechseck?

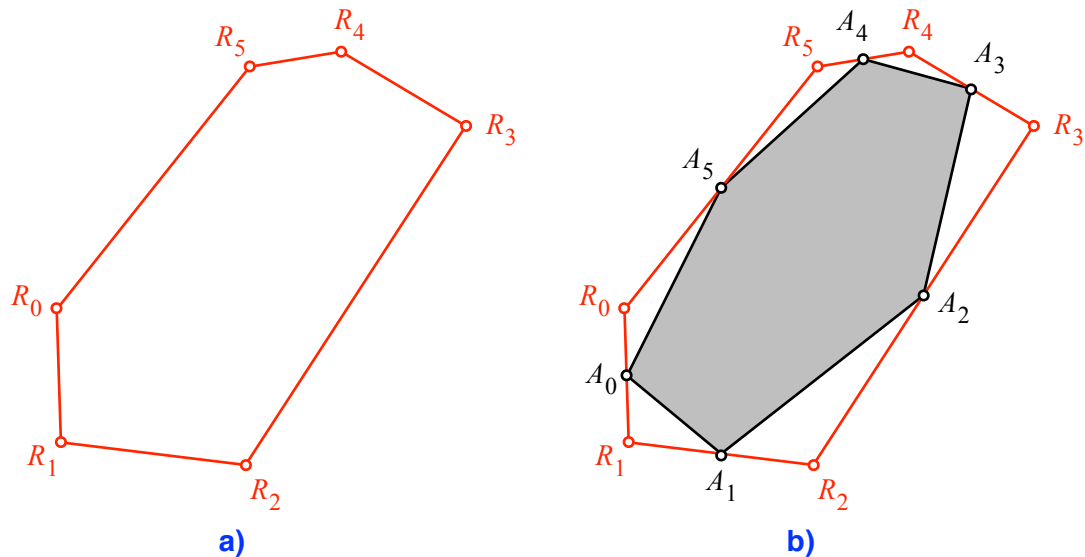


Abb. 1: Sechseck und Kantenmittensechseck

#### 4 Strahlensatz und Vektoren

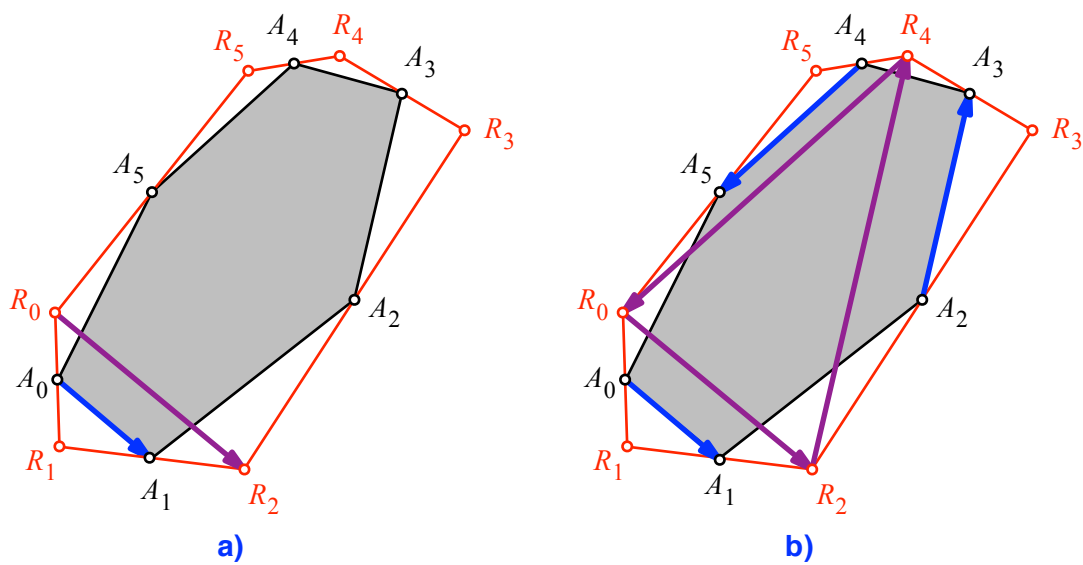


Abb. 2: Strahlensatz und Vektoren

Auf Grund des Strahlensatzes (Zentrum  $R_1$ , Abb. 2a) ist:

$$\overrightarrow{R_0R_2} = 2\overrightarrow{A_0A_1} \quad (1)$$

Analog (Abb. 2b):

$$\overrightarrow{R_2R_4} = 2\overrightarrow{A_2A_3} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{R_4R_0} = 2\overrightarrow{A_4A_5} \quad (2)$$

Daher ist:

$$\underbrace{\overrightarrow{R_0R_2} + \overrightarrow{R_2R_4} + \overrightarrow{R_4R_0}}_{=\vec{0}} = 2(\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_4A_5}) \quad (3)$$

Daraus ergibt sich:

$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_4A_5} = \vec{0} \quad (4)$$

Die drei blauen Vektoren bilden also ein Dreieck (Abb. 3b). Ebenso bilden die drei anderen Seiten parallel verschoben ein Dreieck (Abb. 3c).

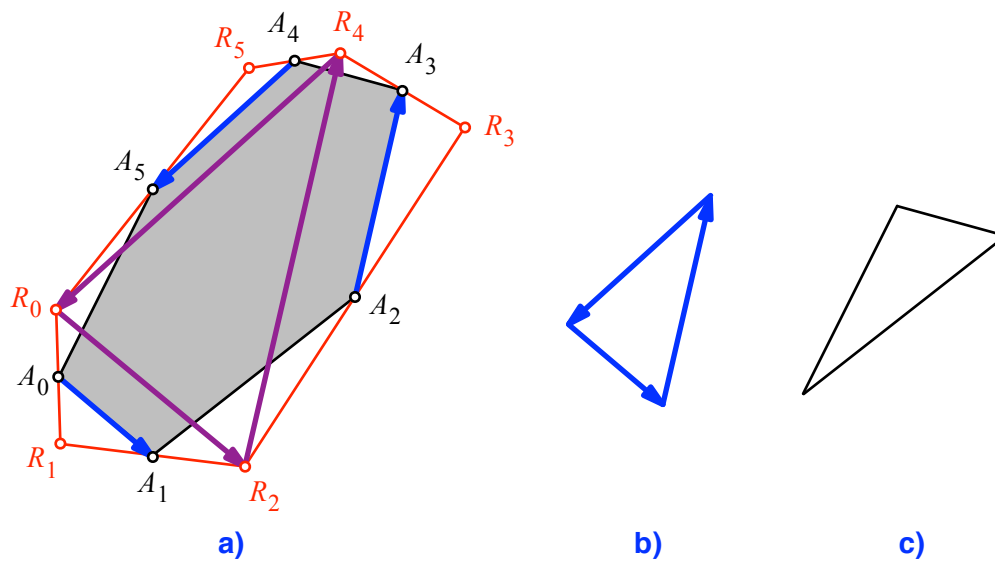


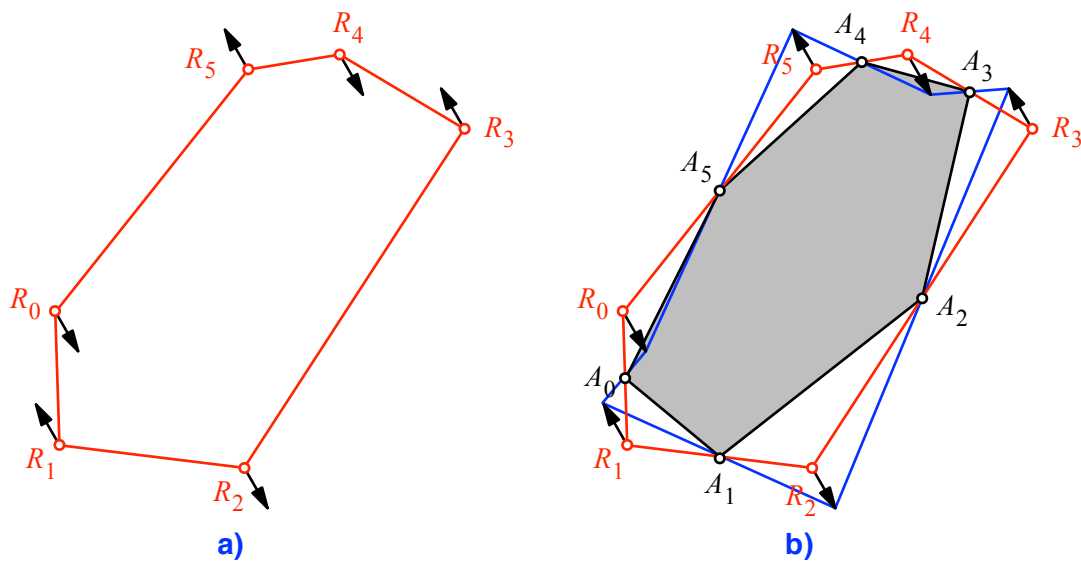
Abb. 3: Dreiecke

Wenn die Bedingung (4) *nicht* erfüllt ist, kann das Sechseck  $A_0 A_1 \dots A_5$  kein Umsehseck haben, denn aus der Existenz eines Umsehsecks folgt automatisch (4).

Die Bedingung (4) kennzeichnet also die Kantenmittensechsecke.

## 5 Weitere Umsehsecke

Wenn wir die Ecken des Umsehseckes  $R_0 R_1 \dots R_5$  alternierend um einen Vektor und seinen Gegenvektor verschieben (Abb. 4a), erhalten wir ein Sechseck mit demselben Kantenmittensechseck (Abb. 4b).



**Abb. 4: Alternierendes Verschieben der Ecken**

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Strahlensatz.

Ein Kantenmittensechseck hat also beliebig viele Umsechsecke.

## 6 Zusammenfassung

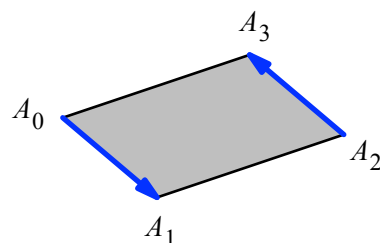
Ein Sechseck  $A_0A_1\dots A_5$  ist genau dann ein Kantenmittensechseck, wenn es die Bedingung (4) erfüllt. In diesem Fall hat es unendlich viele passende Umsechsecke.

## 7 Link mit dem Satz von Varignon

Die zu (4) analoge Bedingung für ein Viereck  $A_0A_1A_2A_3$  lautet:

$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{0} \quad (5)$$

Der zweite Vektor ist also der Gegenvektor zum ersten. Er ist gleich lang und antiparallel. Das heißt, dass das Viereck  $A_0A_1A_2A_3$  ein Parallelogramm ist (Abb. 5).



**Abb. 5: Parallelogramm**

## 8 Verallgemeinerung

Ein Achteck  $A_0A_1\dots A_7$  ist genau dann ein Kantenmittenachteck, wenn es die Bedingung

$$\overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_4A_5} + \overrightarrow{A_6A_7} = \vec{0} \quad (6)$$

erfüllt. Es hat unendlich viele Umachtecke.

Ein  $2n$ -Eck ist genau dann ein Kantenmitten- $2n$ -Eck, wenn es die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{A_{2k}A_{2k+1}} = \vec{0} \quad (7)$$

erfüllt. Es hat unendlich viele Um- $2n$ -Ecke.

## Websites

Hans Walser: Umviereck

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/U/Umviereck/Umviereck.htm>

Hans Walser: Logarithmische Kantenmittenspirale

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Log\\_Kantenmittenspirale/Log\\_Kantenmittenspirale.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Log_Kantenmittenspirale/Log_Kantenmittenspirale.htm)

Hans Walser: Logarithmische Kantenmittenspiralen

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Log\\_Kantenmittenspiralen/Log\\_Kantenmittenspiralen.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Log_Kantenmittenspiralen/Log_Kantenmittenspiralen.htm)

Hans Walser: Spiralen im regelmäßigen Vieleck

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Spiralen\\_reg\\_Vieleck/Spiralen\\_reg\\_Vieleck.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Spiralen_reg_Vieleck/Spiralen_reg_Vieleck.htm)

Hans Walser: Kantenmittenspirale

[www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmittenspirale/Kantenmittenspirale.htm](http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmittenspirale/Kantenmittenspirale.htm)