Hans Walser, [20170813]

Der Teufel sitzt im Detail

1 Worum geht es?

Erfahrungsgemäß sind Beweise des Satzes von Pythagoras ein sehr beliebtes Thema für Semester- oder Diplomarbeiten bei Lehramtskandidaten der Sekundarstufe 1 (vgl. die schöne Arbeit (Maresch und Promberger 2017)).

Bei meinen Studierenden ergaben sich dann immer wieder interessante Diskussionen über die Stimmigkeit der von ihnen vorgestellten Beweise. Es ist eine didaktische Herausforderung, einen falschen Beweis für einen an sich wahren Satz einsichtig zu machen. Dabei ist es nicht möglich, wie bei einem falschen Satz einfach mit einem Gegenbeispiel zu operieren. Vielmehr muss eine inkonsistente logische Struktur aufgezeigt werden.

Ich bin dabei oft mit fast trotzigen Antworten konfrontiert worden: Aber es stimmt doch! Die Stimmigkeit eines Satzes garantiert aber noch nicht die Richtigkeit des vorgelegten Beweises.

Im Folgenden werden einige falsche, fragwürdige oder schwindelerregende Beweise des Satzes von Pythagoras vorgestellt.

Es wird die übliche Notation für das rechtwinklige Dreieck verwendet.

2 Der Klassiker

Der absolute Klassiker besteht darin, den Satz von Pythagoras als Sonderfall des Kosinus-Satzes zu sehen. Dabei wird übersehen, dass die in der Schule übliche Herleitung des Kosinus-Satzes den Satz von Pythagoras benützt. Also wäre es ein Zirkelschluss, damit den Satz von Pythagoras beweisen zu wollen.

Gleichwohl ist es sinnvoll, nach der Herleitung des Kosinus-Satzes auf den Sonderfall des rechtwinkligen Dreieckes hinzuweisen. Das ist einerseits ein cross check und andererseits eine Einbettung des neuen Satzes in schon vorhandenes Basiswissen.

Zum Nachdenken: Gibt es eine pythagorasfreie Herleitung des Kosinus-Satzes?

3 Trigonometrie

Aus

$$a = c\sin(\alpha) \quad b = c\cos(\alpha) \tag{1}$$

folgt:

$$a^2 + b^2 = c^2\left(\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right) \tag{2}$$

Wegen der trigonometrischen Identität

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \tag{3}$$

folgt unmittelbar der Satz von Pythagoras.

Der Schwachpunkt liegt auf der Hand: die bombastische Formulierung „trigonometrische Identität“ darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass zum Beweis von (3) in der Regel der Satz von Pythagoras verwendet wird.

4 Invariante

Mathematik ist das Auffinden von Invarianten. Fast jeder Satz der Mathematik kann mit einer Invarianten formuliert werden.

Der Satz von Pythagoras kann als Invariante interpretiert werden wie folgt (Abb. 1).

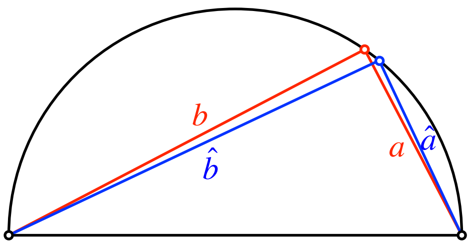

Abb. 1: Veränderung des Dreiecks

Wird die Ecke mit dem rechten Winkel auf dem Thaleskreis bewegt, bleibt die Summe der Kathetenquadrate invariant:

$$\hat{a}^2+\hat{b}^2=a^2+b^2 \tag{4}$$

Ist diese Invarianz einmal nachgewiesen, ergibt sich durch den Grenzfall $a \to 0$ (oder $b \to 0$) die übliche Formulierung des Satzes von Pythagoras.

Allerdings können sich beim Invarianznachweis Fehler und Ungreimtheiten einschleichen.

4.1 Der schmutzige Trick von Newton

Bei einer kleinen Verschiebung der Ecke mit dem rechten Winkel auf dem Thaleskreis entsteht ein kleines Dreieck (Abb. 2, Lupe), das zum Ausgangsdreieck einigermaßen ähnlich ist. Und zwar ist:

$$\Delta a : \Delta b \approx b : a \tag{5}$$

Dies kann mit einem kleinen Δt in der Form

$$\Delta a \approx \Delta t \cdot b \quad \text{und} \quad \Delta b \approx \Delta t \cdot a \tag{6}$$

geschrieben werden.

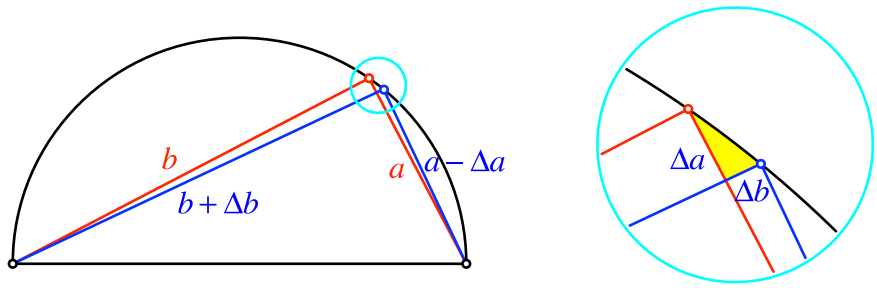

Abb. 2: Der schmutzige Trick von Newton

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}(a-\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2 &\approx (a-\Delta t\cdot b)^2+(b+\Delta t\cdot a)^2\\ &= a^2-2\Delta t\cdot ab+\Delta t^2 b^2+b^2+2\Delta t\cdot ab+\Delta t^2 a^2\\ &= a^2+b^2+\Delta t^2\left(a^2+b^2\right)\end{aligned}\tag{7}$$

Der schmutzige Trick von Newton (Ausdruck einer Studierenden) besteht nun darin, Quadrate und höhere Potenzen eines kleinen Ausdrucks wegzulassen. Weglassen von Δt^2 ergibt aus (7) die Pythagoras-Invarianz.

Ist dieser Beweis in Ordnung?

4.2 Konstante Funktion

Wir fassen (2) als Funktion von α auf:

$$f(\alpha)=\left(a^2+b^2\right)(\alpha)=c^2\left(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right)\tag{8}$$

Nun leiten wir nach α ab:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}f(\alpha)=c^2\left(2\sin(\alpha)\cos(\alpha)-2\cos(\alpha)\sin(\alpha)\right)=0\tag{9}$$

Die Funktion ist eine Konstante. Wir erhalten also die Pythagoras-Invarianz.

Die Frage ist, ob in den Ableitungsregeln für die Sinus- oder Kosinusfunktion nicht irgendwo versteckt schon der Satz von Pythagoras vorhanden ist.

Versuchen wir es ohne Ableiten mit einer Differenzbildung und den Additionstheoremen. Das gibt einiges an Rechnung:

$$\begin{aligned}
f(\alpha+\Delta\alpha)-f(\alpha) &= c^2\Big(\big(\sin^2(\alpha+\Delta\alpha)+\cos^2(\alpha+\Delta\alpha)\big)-\big(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\big)\Big)\\
&= c^2\begin{pmatrix} \big(\sin(\alpha)\cos(\Delta\alpha)+\big(\cos(\alpha)\sin(\Delta\alpha)\big)\big)^2 \\ +\big(\cos(\alpha)\cos(\Delta\alpha)-\big(\sin(\alpha)\sin(\Delta\alpha)\big)\big)^2 \\ -\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha) \end{pmatrix}\\
&= c^2\begin{pmatrix} \sin^2(\alpha)\cos^2(\Delta\alpha)+2\sin(\alpha)\cos(\Delta\alpha)\cos(\alpha)\sin(\Delta\alpha)+\cos^2(\alpha)\sin^2(\Delta\alpha) \\ \cos^2(\alpha)\cos^2(\Delta\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\Delta\alpha)\sin(\alpha)\sin(\Delta\alpha)+\sin^2(\alpha)\sin^2(\Delta\alpha) \\ -\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha) \end{pmatrix}\\
&= c^2\begin{pmatrix} \sin^2(\alpha)\big(\cos^2(\Delta\alpha)+\sin^2(\Delta\alpha)\big)+\cos^2(\alpha)\big(\cos^2(\Delta\alpha)+\sin^2(\Delta\alpha)\big) \\ -\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10}$$

Wenn wir jetzt die trigonometrische Identität (3) anwenden dürften, wären wir über dem Berg und erhielten die Invarianz:

$$f(\alpha+\Delta\alpha)=f(\alpha) \tag{11}$$

5 Didaktisches

In unserem Schulsystem durchläuft jede Schülerin und jeder Schüler verschiedene Schulstufen, Schulsysteme und Klassen mit verschiedenen Lehrpersonen. Das bringt mich sich, dass kaum einer Schülerin oder einem Schüler ein logisch konsistenter lückenloser Aufbau der Mathematik dargereicht wird. Dies gilt insbesondere dann, wenn eine Schulstufe wie etwa die Sekundarstufe 1 mehrere Ziele (Vorbereitung für Berufslehre und Vorbereitung aufs Gymnasium) zu erreichen hat.

Was im Unterricht als „Beweis“ bezeichnet wird, ist in aller Regel kein Beweis from first principles, sondern eine Verortung im schulischen Umfeld. Ob alle Sätze in diesem Umfeld bewiesen sind, lässt sich nicht überprüfen und ist auch unterschiedlich für verschiedene Schülerinnen und Schüler. Der Sinn dieser Beweise liegt dann auch nicht im Fixieren ewiger Wahrheiten, sondern im Erleben des lebendigen Geistes. Daher ist es gut und lehrreich, auch mit falschen Beweisen konfrontiert zu werden.

Literatur

Maresch, Günter und Promberger, Janine (2017): Die mehr als 400 Beweise des Satzes von Pythagoras – eine mathematisch-geometrische Schatzkiste für alle Schulstufen. IBDG, Informationsblätter der Geometrie (36), Heft 1/2017, 16-20.