

Hans Walser, [20160924]

## Taxi Cab Geometry

Anregung: Chr. H., O.

### 1 Worum geht es?

Es geht um die Darstellung der Mittelsenkrechten (Ort gleicher Abstände von zwei gegebenen Punkten) in der Taxi Cab Geometry.

### 2 Taxi Cab Geometry

Es gibt drei Sichtweisen:

- Beschränkung auf Gitterpunkte. Modellvorstellung: Straßenbahnsystem in einer Karo-Stadt mit Haltestellen an den Kreuzungspunkten zweier Linien. Realisation (ungefähr): Street Car System in Toronto (das ist aber in Canada). In den folgenden Abbildungen werden Gitterpunkte rot eingezeichnet.
- Beschränkung auf Punkte, die von einem Taxi angefahren werden können. Also Gitterpunkte und Punkte auf Gitterlinien. Modellvorstellung: Taxisystem in einer Karo-Stadt. Realisation (ungefähr): La Chaux-de-Fonds (Schweizer Jura, rechteckige Karos). In den folgenden Abbildungen werden diese Punkte blau eingezeichnet.
- Geometrie mit der Metrik:  $ds = |dx| + |dy|$ . In den folgenden Abbildungen wird diese Situation grün gezeichnet. Für den Abstand zweier Punkte  $A$  und  $B$  gilt:

$$d(A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \quad (1)$$

### 3 Beispiele von Mittelsenkrechten

#### 3.1 Beispiel 1

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 4)$  (Abb. 1). Es ist  $d(A, B) = 10$ , eine gerade Zahl.

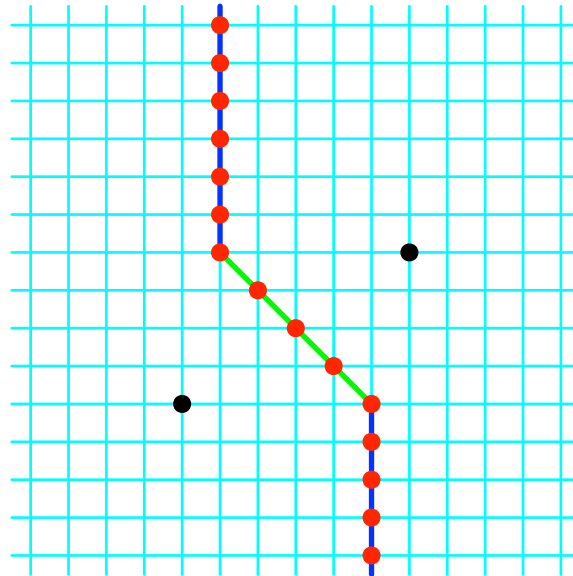


Abb. 1: Mittelsenkrechte

### 3.2 Beispiel 2

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 5)$  (Abb. 2). Es ist  $d(A, B) = 11$ , eine ungerade Zahl. Die Mittelsenkrechte enthält keine Gitterpunkte.

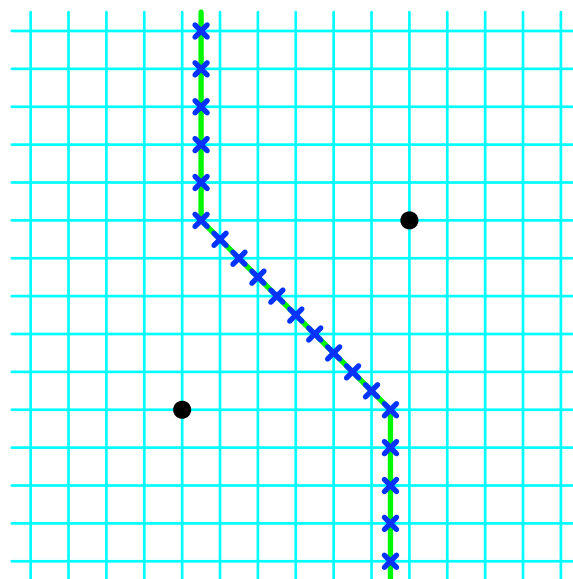
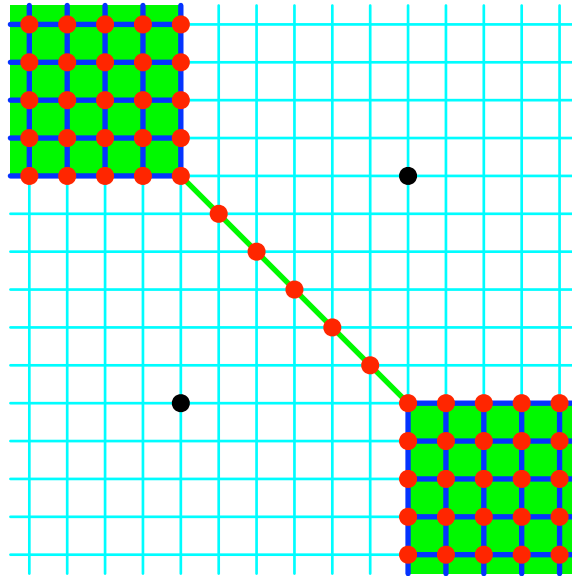


Abb. 2: Mittelsenkrechte ohne Gitterpunkte

### 3.3 Beispiel 3

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 6)$  (Abb. 3). Die beiden Koordinatendifferenzen sind gleich groß. Die Punkte  $A$  und  $B$  sind diametrale Ecken eines zu den Gitterlinien parallelen Quadrates.

Hier wird es spannend. Die Mittelsenkrechte hat an beiden Enden je ein nach außen offenes Rechtwinkelfeld. Die Vorstellung einer „Linie“ muss aufgegeben werden. Die Mittelsenkrechte franst aus.



**Abb. 3: Mittelsenkrechte mit zweidimensionalen Enden**

## 4 Algebraisches Vorgehen

Wir suchen zu zwei gegebenen Punkt  $A$  und  $B$  die Menge aller Punkte  $P(x,y)$  mit:

$$d(AP) = d(BP) \quad (2)$$

Wegen der Metrik (1) suchen wir das Nullniveau der Funktion:

$$f(x,y) = (|x - x_A| + |y - y_A|) - (|x - x_B| + |y - y_B|) \quad (3)$$

Wir suchen also die Kurve mit der impliziten Gleichung:

$$f(x,y) = 0 \quad (4)$$

Im Folgenden wieder die Beispiele von oben. Es werden nur die grünen Punkte gezeichnet. Verwendete Software: Maple16. Leider kann GeoGebra implizite Kurven nur für lineare und quadratische Funktionen auswerten. Die Absolutbeträge in (3) sind bockig.

#### 4.1 Beispiel 1

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 4)$  (Abb. 4).

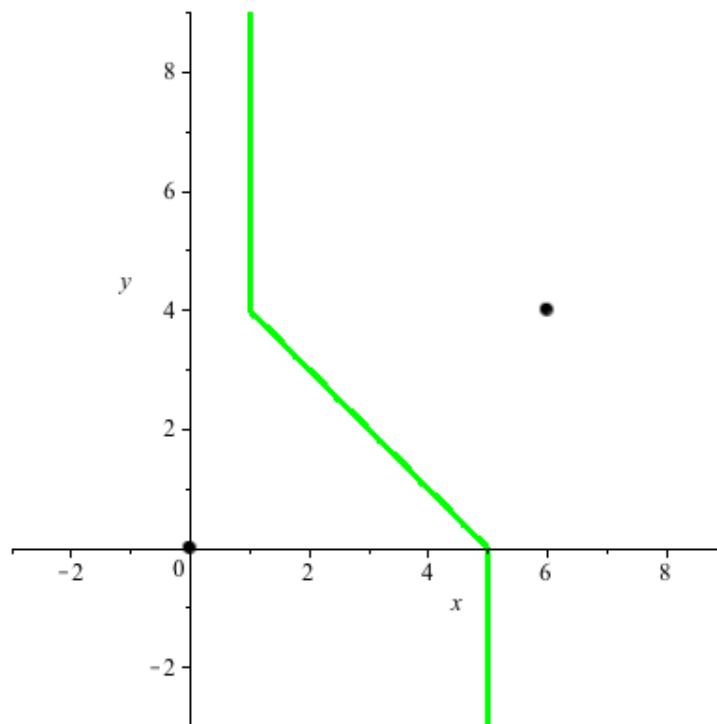
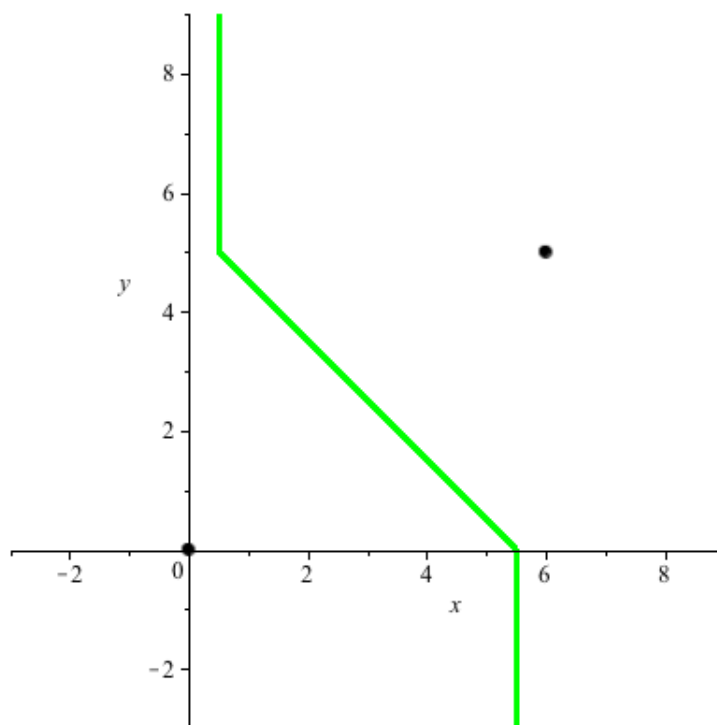


Abb. 4: Beispiel 1

## 4.2 Beispiel 2

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 5)$  (Abb. 5).

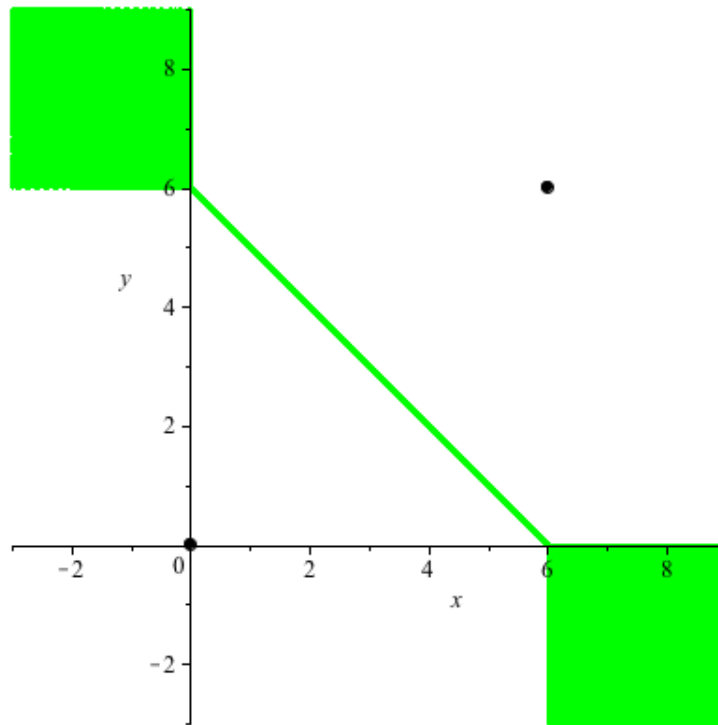


**Abb. 5: Beispiel 2**

Dieses zweite Beispiel unterscheidet sich im grünen Bereich nicht wesentlich vom ersten Beispiel.

### 4.3 Beispiel 3

Mittelsenkrechte der Punkte  $A(0, 0)$  und  $B(6, 6)$  (Abb. 6). Das ist das spannende Beispiel.



**Abb. 6: Beispiel 3**

Ich musste eine ziemlich hohe Auflösung verwenden, damit der Computer die flächigen Teile der Mittelsenrechten einwandfrei zeichnen konnte.