Hans Walser, [20180619]

Tangenten an Ellipse und Hyperbel

1 Worum geht es?

Es wird eine einfache Konstruktion der Tangenten von einem Punkt an eine Ellipse oder eine Hyperbel gezeigt.

2 Ellipse

Von einer Ellipse seien die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und der lange Durchmesser $2a$ gegeben (Abb. 1a). Von einem Punkt P aus sollen die Tangenten an die Ellipse konstruiert werden.

Vorgehen: Wir zeichnen um F_1 und F_2 je einen Kreis l_1 beziehungsweise l_2 mit dem Radius $2a$ (Abb. 1a). Weiter zeichnen wir um P je einen Kreis k_1 und k_2 durch F_1 beziehungsweise F_2. Weiter arbeiten wir mit den Schnittpunkten $Q_{i,j}$ gemäß Abbildung 1b.

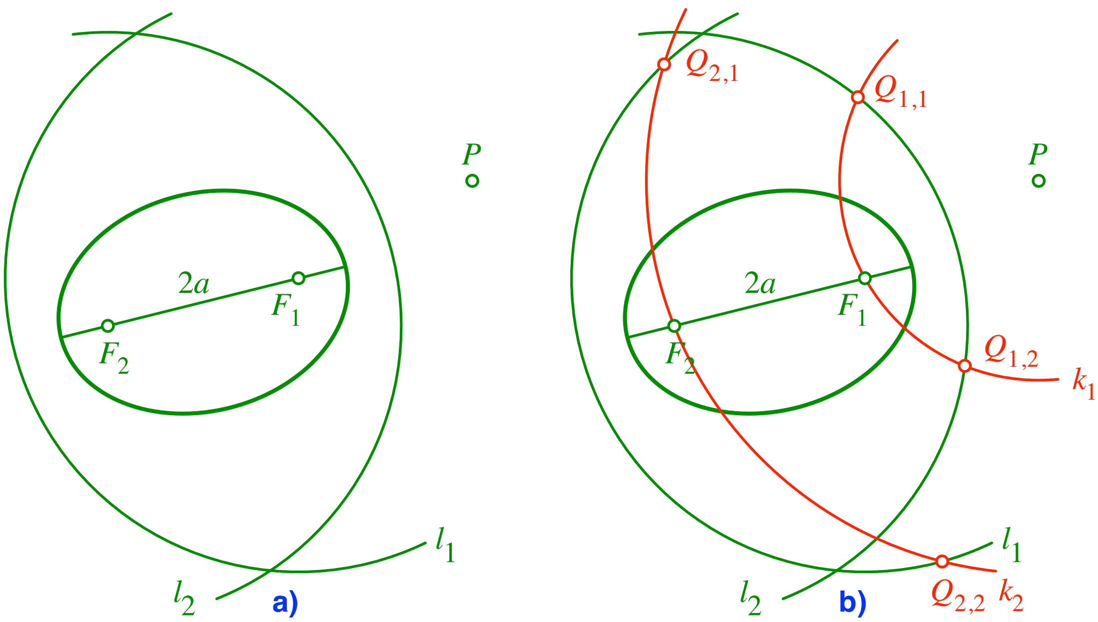

Abb. 1: Kreise

Weiter sei B_1 der Schnittpunkt der Strecken $F_1Q_{2,1}$ und $F_2Q_{1,1}$ (Abb. 2a). Dieser Punkt liegt auf der Ellipse und ist der Berührungspunkt für die Tangente t_1 (Abb. 2b). Analog für die zweite Tangente.

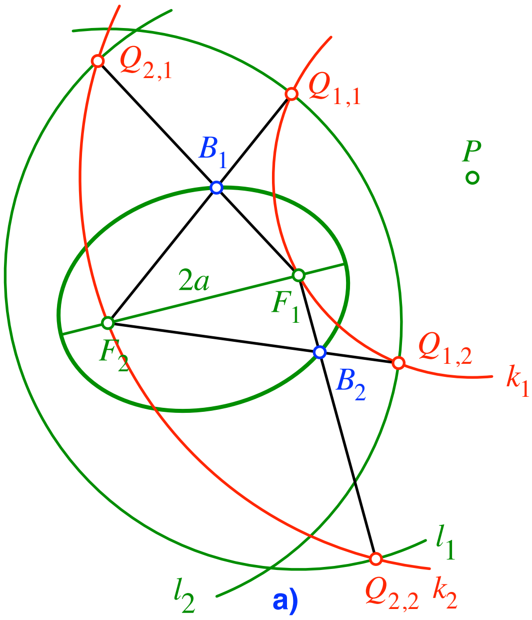

Abb. 2: Berührungspunkte und Tangenten

Beweis mit den Abstands- und Reflexionseigenschaften der Ellipse.

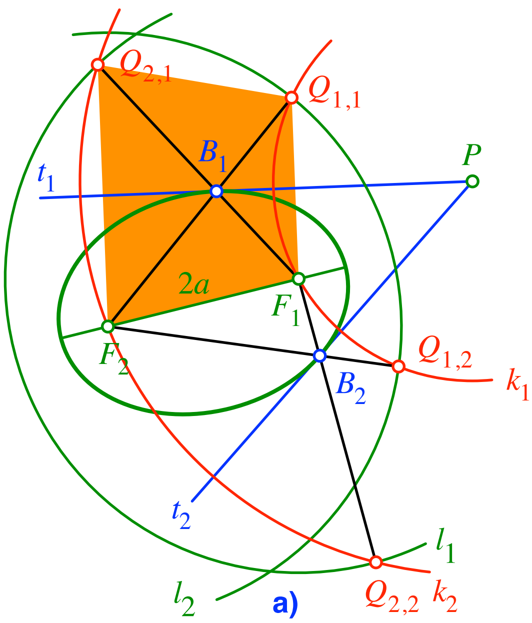

Abb. 3: Beweisfigur

Das in der Abbildung 3 orange markierte Viereck ist gemäß Konstruktion ein gleichschenkliges Trapez. Daher hat der Streckenzug $F_1B_1F_2$ die gleiche Länge wie die Diagonale $F_1Q_{2,1}$, also $2a$. Somit liegt der Punkt B_1 auf der Ellipse (Abstandseigenschaft). Weiter ist t_1 Symmetrieachse des Trapezes und damit Winkelhalbierende der beiden Diagonalen. Es ist also die Reflexionseigenschaft erfüllt, t_1 ist Tangente an die Ellipse.

Analog für die zweite Tangente t_2.

3 Hyperbel

Bei der Hyperbel geht die Konstruktion analog (Abb. 4 und 5).

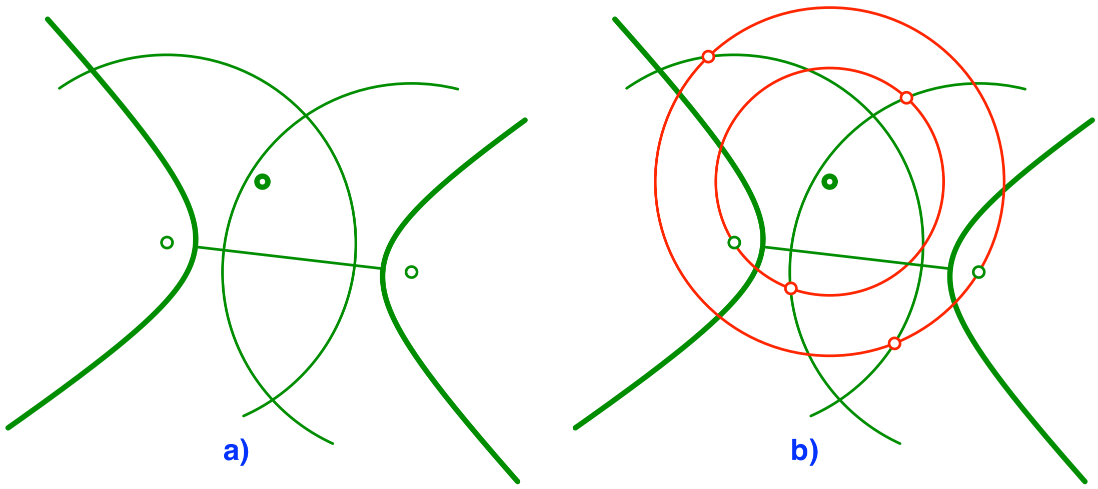

Abb. 4: Ausgangslage für die Hyperbel

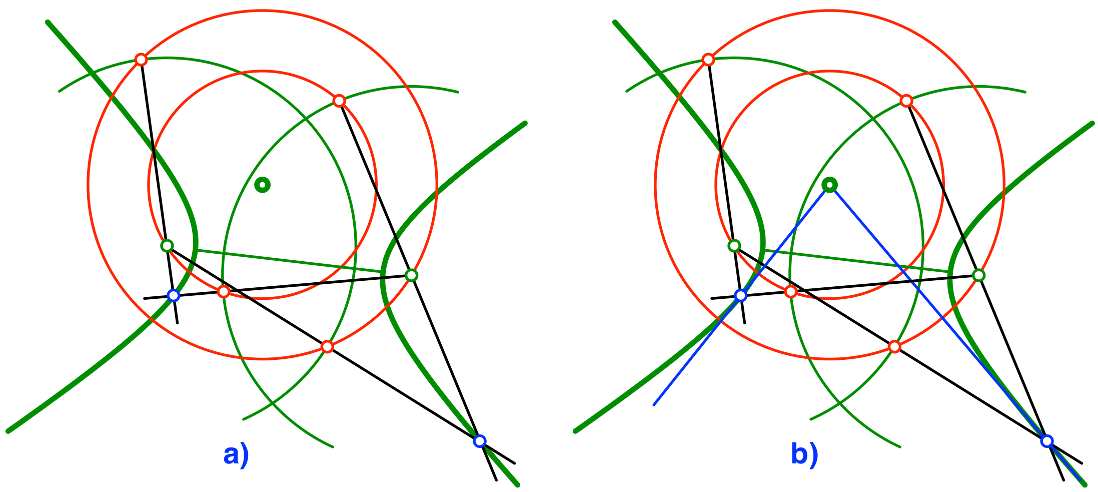

Abb. 5: Tangenten an die Hyperbel

Websites

Hans Walser: *Kreistangente ohne Thaleskreis* (abgerufen 18.06.2018):
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreistangente_o_Tk/Kreistangente_o_Tk.htm