Hans Walser, [20200515]

Summe von Potenzen

Aufgabenstellung: Thomas Jahre, Aufgabe 54-641_2

1 Die Aufgabe

Es gilt $a + b = 1$ und $a^2 + b^2 = 2$. Wie lautet das Ergebnis von $a^4 + b^4$?

2 Bearbeitung

Zunächst ist (quadratisches Problem):

$$a = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), \quad b = \tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) \tag{1}$$

Es sei $s_z = a^z + b^z,\, z \in \mathbb{Z}$. Die Tabelle 1 gibt die Werte für $z \in \left\{-8,\ldots,8\right\}$

z	s_z
–8	3104
–7	–1136
–6	416
–5	–152
–4	56
–3	–20
–2	8
–1	–2
0	2
1	1
2	2
3	5/2
4	7/2
5	19/4
6	13/2
7	71/8
8	97/8

Tab. 1: Einige Werte

Obwohl a und b irrational sind, sind s_z rational, für negative Indizes z sogar ganzzahlig. Beim händischen Ausrechnen (binomische Formel) sieht man das sofort ein.

3 Fibonacci

Die Folge $\{s_z\}$ genügt der Rekursion

$$s_{z+1} = s_z + \tfrac{1}{2} s_{z-1} \tag{2}$$

mit den Stützwerten $s_1 = 1, s_2 = 2$. Beweis induktiv.

Beispiele:

$$\begin{aligned} s_6 &= s_5 + \tfrac{1}{2} s_4 = \tfrac{19}{4} + \tfrac{1}{2}\tfrac{7}{2} = \tfrac{13}{2} \\ s_{-3} &= s_{-4} + \tfrac{1}{2} s_{-5} = 56 + \tfrac{1}{2}(-152) = -20 \end{aligned} \tag{3}$$

Wir haben es also mit einer verallgemeinerten Fibonacci-Folge zu tun.

4 Wie ist es dazwischen?

Funktioniert die Folge auch für nicht ganzzahlige Indizes? Was ist zum Beispiel $s_{3.5}$?

Da b negativ ist, ergeben sich für $s_r = a^r + b^r, r \in \mathbb{R}$ komplexe Werte.

So ist zum Beispiel:

$$s_{3.5} \approx 2.9792 - 0.0297\mathrm{i} \tag{4}$$

Wir betrachten die Funktion:

$$f(t) = a^t + b^t \tag{5}$$

Die Abbildung 1 zeigt die komplexen Funktionswerte in der Gaußschen Ebene der komplexen Zahlen für $t \in [0, 5]$. Die Kurve verläuft gemäß Tabelle 1 durch die reellen Werte 2, 1, 2, 5/2, 7/2, 19/4.

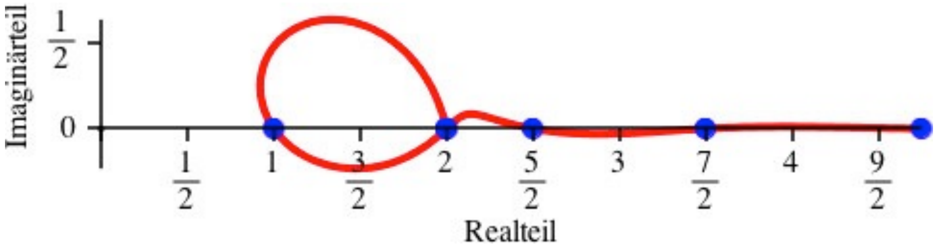

Abb. 1: Das Sauschwänzlein

Die Abbildung 2 zeigt die komplexen Funktionswerte für $t \in [-4, 5]$.

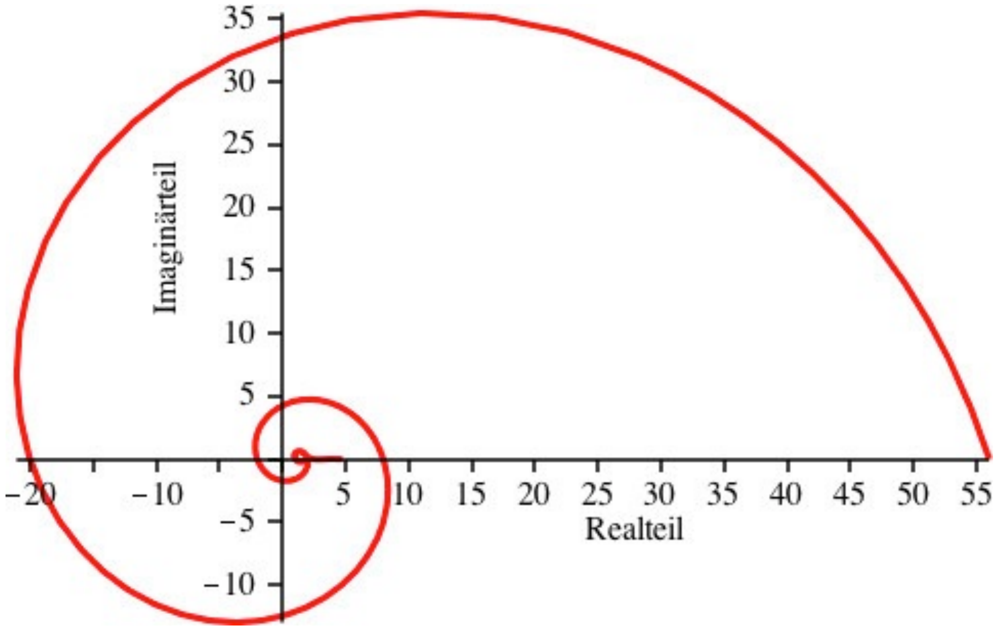

Abb. 2: Angenähert eine logarithmische Spirale

Wir erhalten approximativ eine logarithmische Spirale, welche aber nicht in den Ursprung einmündet, sondern ins Sauschwänzlein der Abbildung 1 übergeht.

Website

Thomas Jahre, Aufgabe 54-641_2
https://www.schulmodell.eu/unterricht/faecher/mathematik/wochenaufgabe/serie-54.html?start=4