Hans Walser, [20160629]

Summe der ungeraden Quadratzahlen

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

1 Worum geht es?

Wir illustrieren und berechnen mit einer räumlichen Überlegung die Folge:

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + \ldots \tag{1}$$

Formal:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \tag{2}$$

2 Eine Pyramide

Wir bauen aus Einheitswürfeln eine rote Pyramide mit n Schichten gemäß Abbildung 1. In jeder Pyramidenschicht haben wir eine ungerade Quadratzahl an Würfeln. Das Volumen der Pyramide ist also s_n.

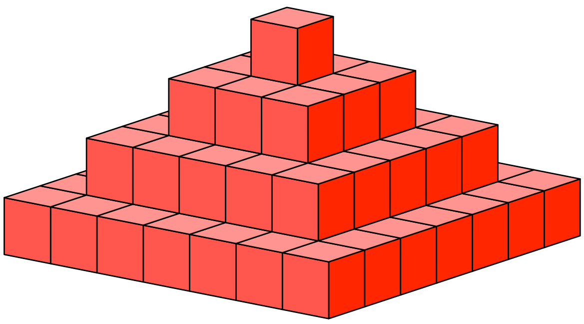

Abb. 1: Pyramide

In der Abbildung 1 ist $n = 4$. Die Pyramide hat 4 Schichten und am Boden eine Kantenlänge $2n - 1 = 7$.

3 Weitere Pyramiden

Wir bauen eine zweite Pyramide (zyan in der Abbildung 2). Auf die Spitze der roten Pyramide setzen wir einen grauen Einheitswürfel und darauf mit der Spitze nach unten die zweite Pyramide.

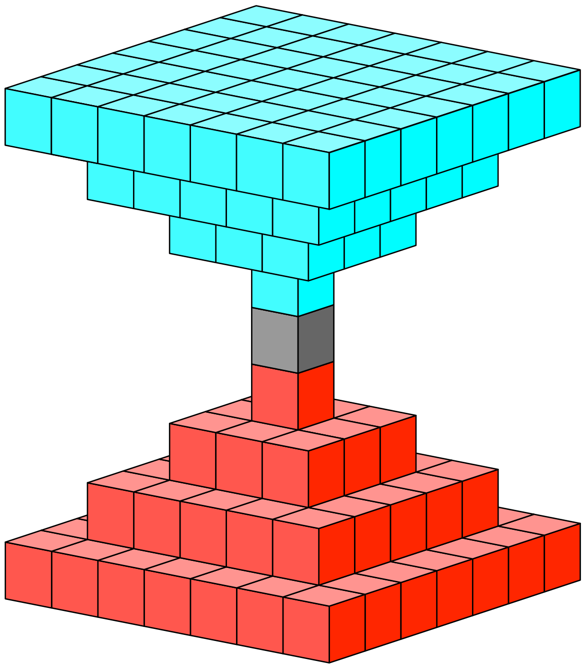

Abb. 2: Zweite Pyramide von oben

Entsprechend setzen wir vorne, hinten, links und rechts eine Pyramide an (Abb. 3). Die Pyramiden stehen gegenseitig nur über Kanten in Kontakt.

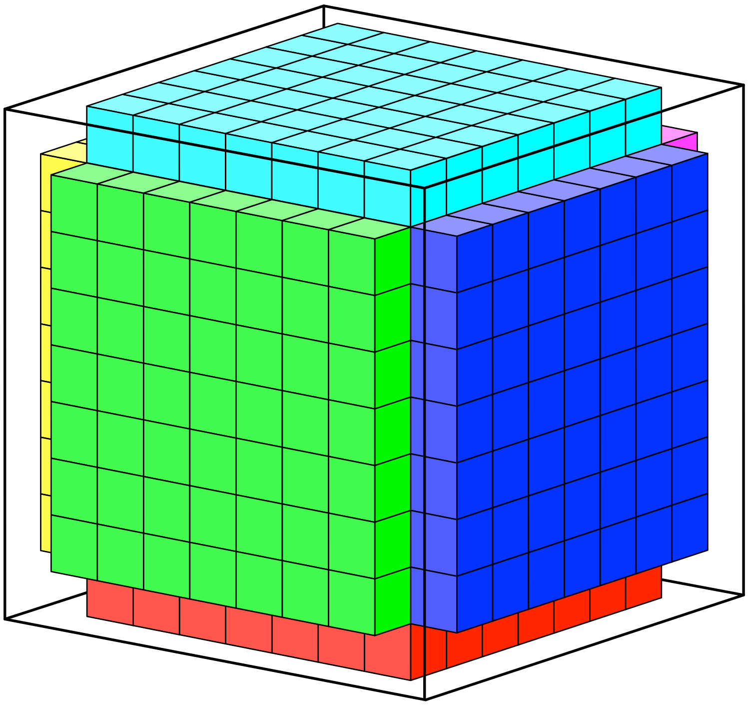

Abb. 3: Weitere Pyramiden

Die Gesamtfigur passt in einen Würfel der Kantenlänge $2n + 1$, füllt diesen aber nicht vollständig aus. Bei den Würfelecken und Würfelkanten fehlen offensichtlich Einheitswürfel. Auch wissen wir aus der Abbildung 2, dass zuinnerst ein „fremder“ Würfel ist, der nicht zu den sechs Pyramiden gehört.

Die Überlegung lohnt sich, wo es überall im großen Würfel versteckte Hohlräume gibt, die nicht zu den sechs Pyramiden gehören.

Das Papiermodell der Abbildung 4 gibt an, wo sich Würfel-Räume befinden, die nicht zu den sechs Pyramiden gehören.

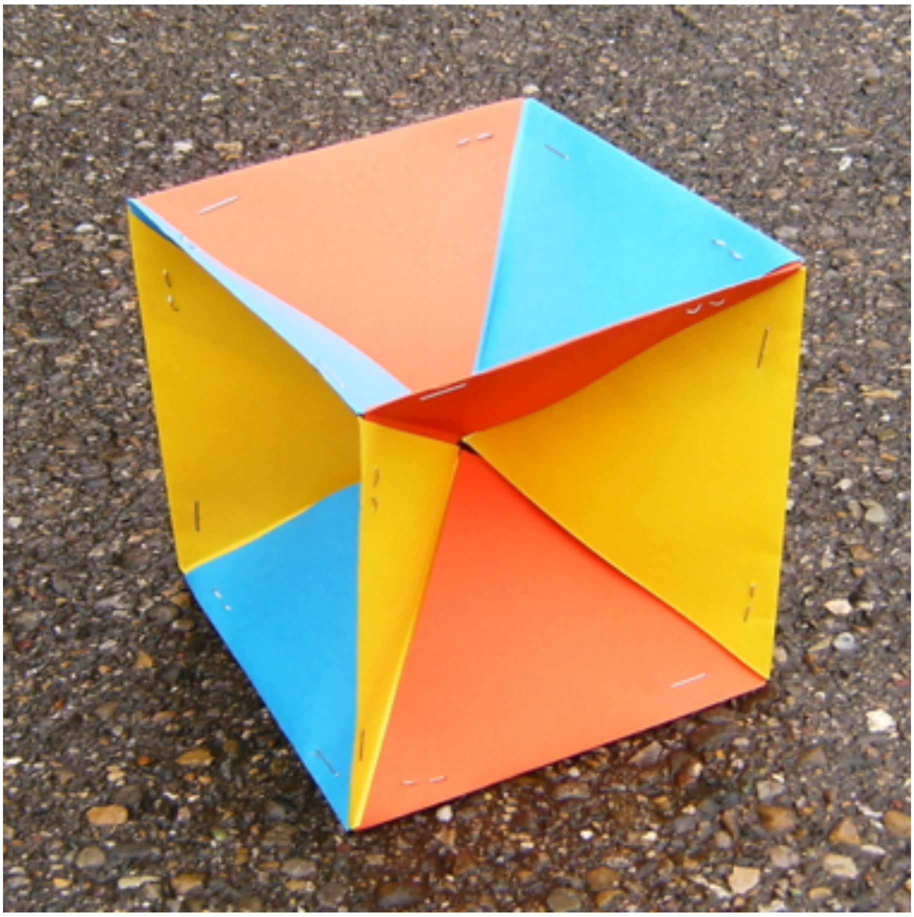

Abb. 4: Papiermodell

4 Analyse

Den Würfel im Zentrum (Abb. 2) haben wir schon erwähnt.

Von jeder der acht Würfelecken aus geht eine halbe Raumdiagonale zum Zentrum. In der Abbildung 5 ist ein Beispiel eingezeichnet.

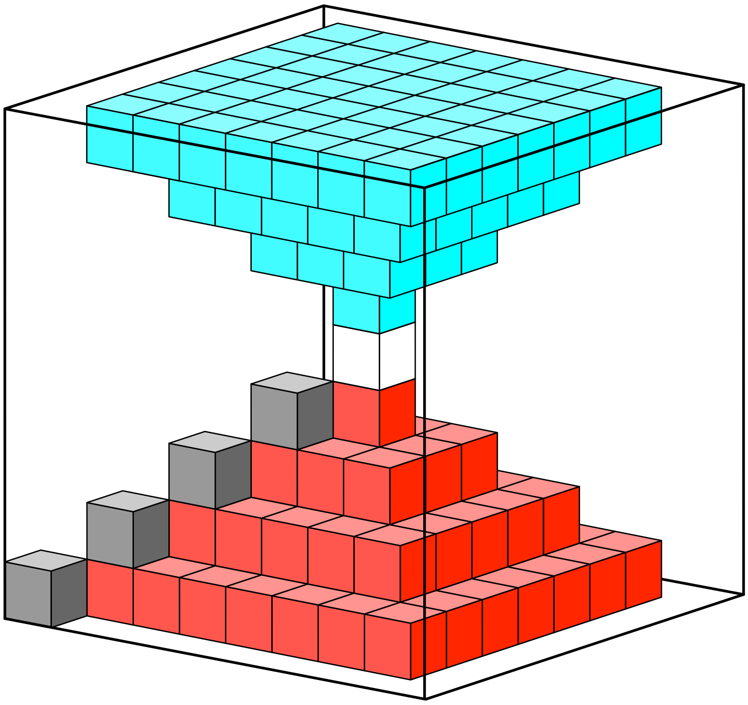

Abb. 5: Halbdiagonale

Die halben Raumdiagonalen bestehen aus je n Würfeln, welche nicht zu den Pyramiden gehören. Von daher gibt es insgesamt $8n$ Einheitswürfel, die nicht zu den Pyramiden gehören.

Weiter geht von jeder der zwölf Kanten aus eine Dreiecksfläche zum Zentrum, die aus nicht zu den Pyramiden gehörenden Würfeln besteht. In der Abbildung 6 ist ein Beispiel eingezeichnet.

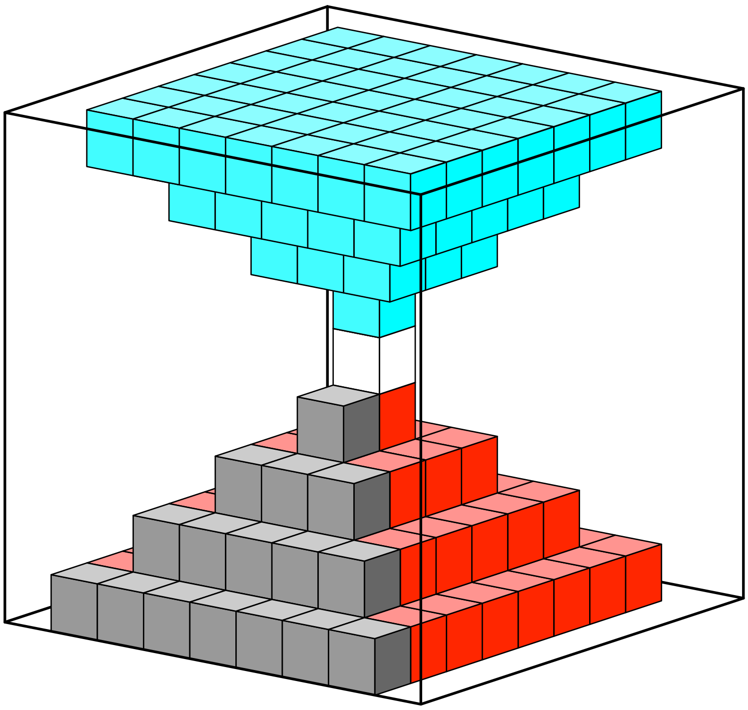

Abb. 6: Dreiecksflächen

Eine solche Dreiecksfläche enthält $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ Würfel, welche nicht zu den Pyramiden gehören. Wir haben es mit der Summe der n ersten ungeraden Zahlen zu tun. Dafür gilt die schöne und einfache Formel:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2 \qquad (3)$$

Es gibt auf diesen 12 Dreiecksflächen also insgesamt $12n^2$ Einheitswürfel, welche nicht zu den Pyramiden gehören.

5 Volumengleichung

Für den großen Würfel der Kantenlänge $2n + 1$ erhalten wir somit die Volumengleichung:

$$\underbrace{(2n+1)^3}_{\text{Würfelvolumen}} = \underbrace{6s_n}_{\text{Pyramiden}} + \underbrace{12n^2}_{\text{Dreiecke}} + \underbrace{8n}_{\text{Diagonalen}} + \underbrace{1}_{\text{Zentrum}} \tag{4}$$

Daraus ergibt sich:

$$s_n = \tfrac{4}{3}n^3 - \tfrac{1}{3}n \tag{5}$$

Websites

(26.06.2016)

Hans Walser: Summe der ungeraden Zahlen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_ungerader_Zahlen/Ungerade_Zahlen.htm

Hans Walser: Würfelmodell
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmodell_Wuerfel/Kantenmodell_Wuerfel.htm