Hans Walser, [20200807]

Spiralenlänge

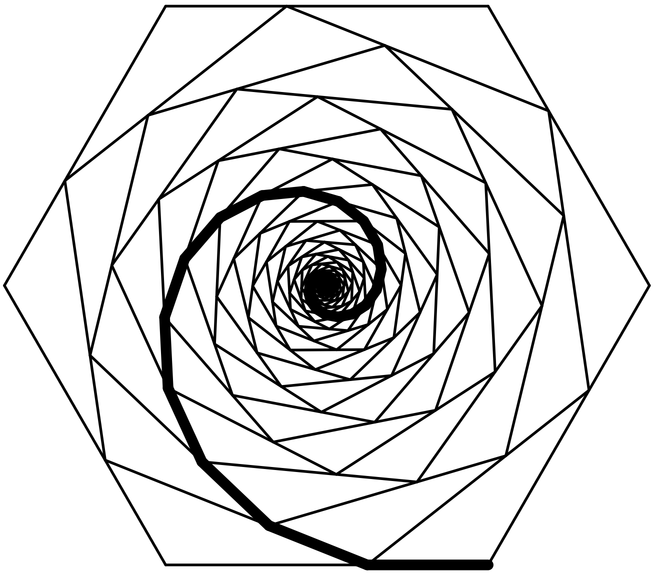

Abb. 1: Spirale im Sechseck

Die Dreiecke haben alle dieselbe Form. Bei welchem Seitenverhältnis dieser Dreiecke ist die Spirale halb so lang wie der Umfang des Sechseckes?

Bearbeitung

Bezeichnungen gemäß Abbildung 2.

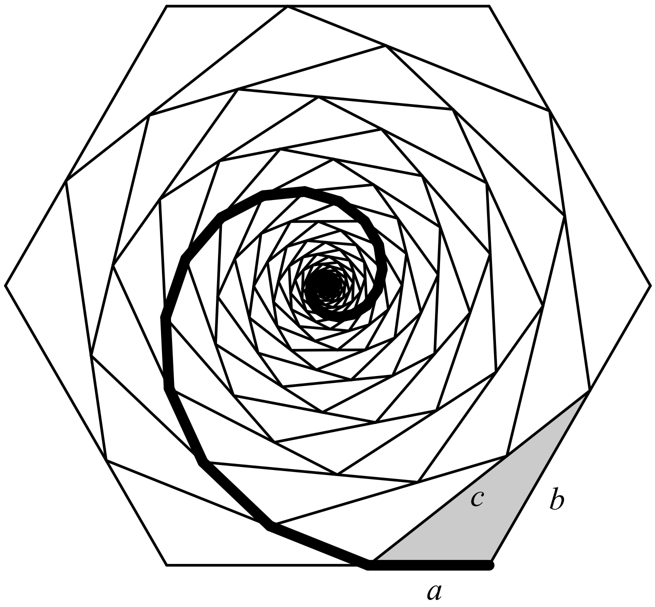

Abb. 2: Bezeichnungen

Die Streckenlängen der Spirale bilden eine geometrische Folge mit dem Startglied a und dem Quotienten $\frac{c}{a+b}$. Die Spiralenlänge s ist also:

$$s = \frac{a}{1-\frac{c}{a+b}} = \frac{a(a+b)}{a+b-c} \qquad (1)$$

Der halbe Umfang des Sechseckes ist $3(a + b)$. Somit haben wir die Bedingung:

$$\begin{aligned} \frac{a(a+b)}{a+b-c} &= 3(a+b) \\ a &= 3(a+b-c) \\ c &= \tfrac{1}{3}(2a+3b) \end{aligned} \qquad (2)$$

Die Dreiecke haben einen stumpfen Winkel $\gamma = 120°$. Der Kosinus-Satz liefert:

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\underbrace{\cos(120^\circ)}_{-\frac{1}{2}} \\
c^2 &= a^2 + b^2 + ab
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Aus (2) und (3) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{9}\left(4a^2 + 12ab + 9b^2\right) &= a^2 + b^2 + ab \\
4a^2 + 12ab + 9b^2 &= 9a^2 + 9b^2 + 9ab \\
5a^2 &= 3ab \\
5a &= 3b
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Es ist also $a{:}b = 3{:}5$. Mit $a = 3$ und $b = 5$ ergibt sich $c = 7$. Somit ist das gesuchte Seitenverhältnis $a{:}b{:}c = 3{:}5{:}7$.
Es geht alles mit rationalen Dingen zu.

Websites

Hans Walser: Pythagoreische Spiralen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoreische_Spiralen2/Pythagoreische_Spiralen2.htm
Hans Walser: Spiralen im regelmäßigen Vieleck
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Spiralen_reg_Vieleck/Spiralen_reg_Vieleck.htm
Hans Walser: Pythagoreische Spiralen
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoreische_Spiralen/Pythagoreische_Spiralen.htm
Hans Walser: Pythagoreische 60°- und 120°-Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth-60-Dreiecke/Pyth-60-Dreiecke.htm