

Hans Walser, [20210722]

Spiralen in Parallelogrammen

1 Ausgangslage

In ein Parallelogramm mit einem spitzen Winkel 60° und dem Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt (Walser 2013) können zwei aus gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzte Spiralen eingezeichnet werden (Abb. 1).

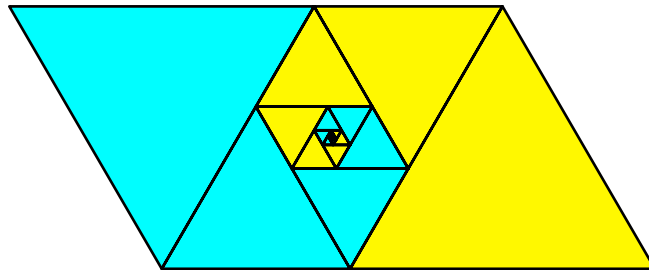


Abb. 1: Spiralen aus gleichseitigen Dreiecken

Die Abbildung 2 zeigt ein Beispiel mit rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken.

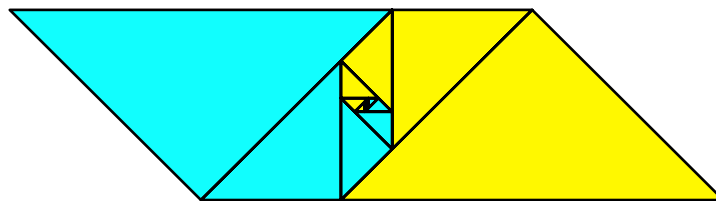


Abb. 2: Rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke

Das Seitenverhältnis des Parallelogramms ist:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \approx 1.931851653 \quad (1)$$

2 Problemstellung

In welche Parallelogramme lassen sich zwei aus gleichschenkligen Dreiecke zusammengesetzte Spiralen einfügen?

3 Witz der Sache

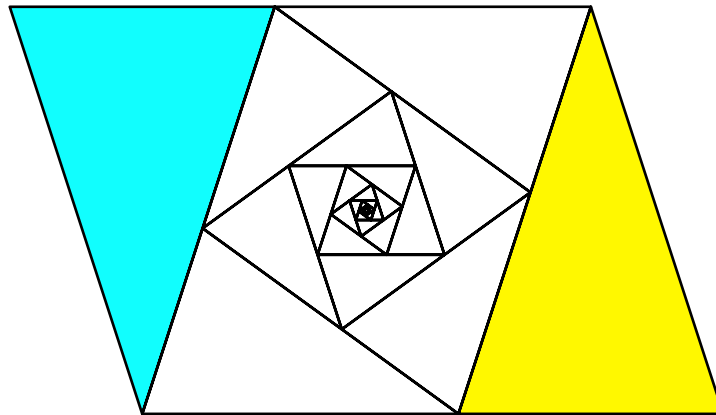


Abb. 3: Ähnliche Parallelogramme

Das Innere der Figur (weiß in Abb. 3) ist ähnlich zur Gesamtfigur.

4 Maße und Bezeichnungen

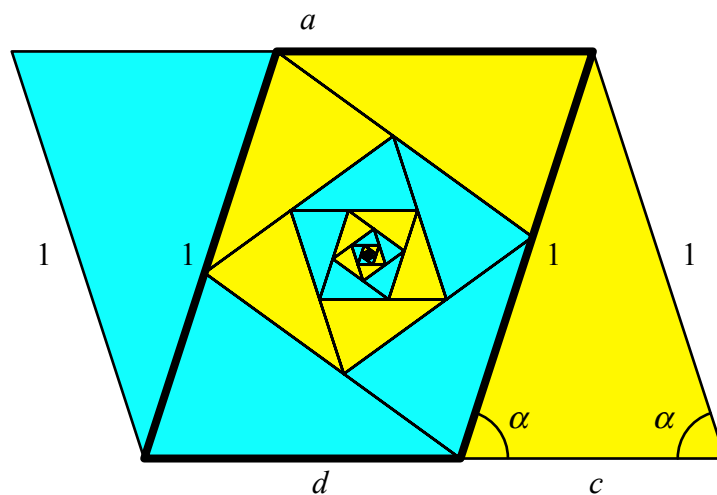


Abb. 4: Maße und Bezeichnungen

Die beiden gleichschenkligen Start-Dreiecke haben die Schenkellänge $b = 1$. Dies ist auch die kürzere Seite des Parallelogramms. Der Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke ist α . Dies ist auch der spitze Winkel des Parallelogramms und zudem der Drehwinkel der Drehstreckung, welche die Gesamtfigur auf die Innenfigur abbildet. Der Streckfaktor ist d .

5 Etwas Rechnung

Es ist:

$$c = 2 \cos(\alpha) \quad (2)$$

Die Ähnlichkeitsbedingung ist:

$$\begin{aligned} \frac{c+d}{1} &= \frac{1}{d} \\ \frac{2 \cos(\alpha) + d}{1} &= \frac{1}{d} \end{aligned} \quad (3)$$

Dies ergibt eine quadratische Gleichung für d :

$$d^2 + 2d \cos(\alpha) - 1 = 0 \quad (4)$$

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist:

$$d = -\cos(\alpha) + \sqrt{\cos^2(\alpha) + 1} \quad (5)$$

Für die Grundseite a des Parallelogramms ergibt sich aus (2) und (5):

$$a = \cos(\alpha) + \sqrt{\cos^2(\alpha) + 1} \quad (6)$$

Dies ist auch das Seitenverhältnis des Parallelogramms.

Auflösen von (6) nach α ergibt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\right) \quad (7)$$

Die Bedingungen (6) beziehungsweise (7) beschreiben die Parallelogramme, in welche sich zwei Spiralen aus gleichschenkligen Dreiecken einzeichnen lassen.

6 Weitere Beispiele

Für $\alpha = 30^\circ$ (Abb. 5) ergibt sich das Seitenverhältnis:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \approx 2.188901060 \quad (8)$$

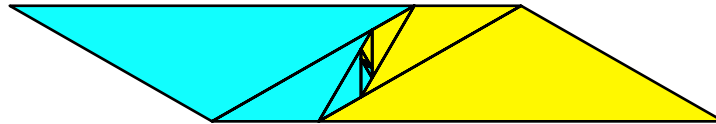


Abb. 5: $\alpha = 30^\circ$

Für $\alpha = 75^\circ$ (Abb. 6) ergibt sich das Seitenverhältnis ~ 1.291769817 .

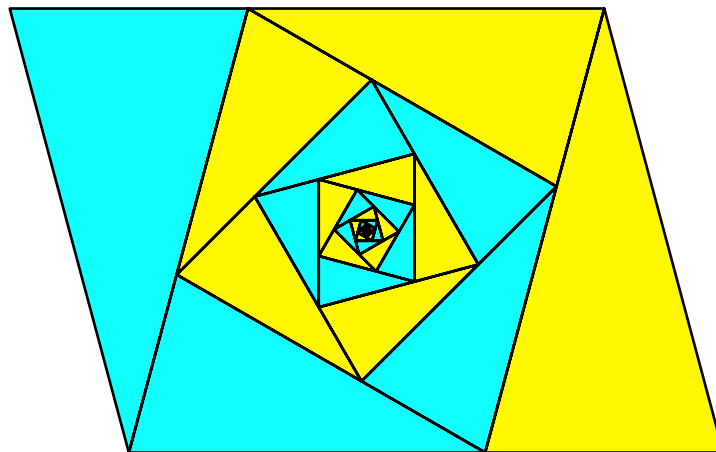


Abb. 6: $\alpha = 75^\circ$

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.