Hans Walser, [20200104]

Spiegeln am Viereck

1 Worum geht es?

Auflistung von Phänomenen. Beweise nur angedeutet.

2 Viereck

Wir beginnen mit einem Viereck $ABCD$ in der üblichen Bezeichnungsweise (Abb. 1).

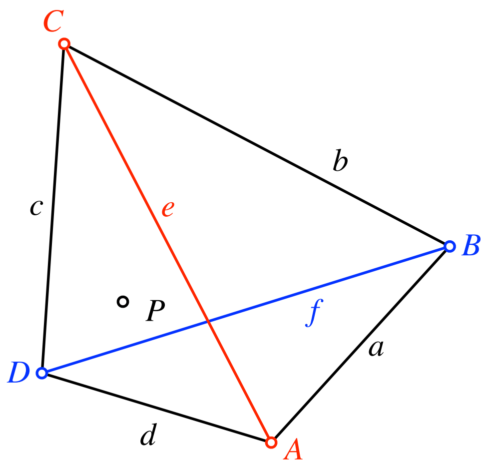

Abb. 1: Viereck

Zusätzlich wählen wir einen Punkt P. Dieser Punkt kann beliebig sein, wenn wir ihn im Innern des Viereckes wählen, werden die Folgezeichnungen übersichtlicher.

Bemerkung: Die Frage ist, ob die folgenden Überlegungen auch spielen, wenn die Figur der Abbildung 1 als räumliches unregelmäßiges Tetraeder interpretiert wird.

3 Spiegelungen

Nun geht das große Spiegeln los.
Zunächst spiegeln wir den Punkt P an den vier Seiten und an den beiden Diagonalen des Vierecks (Abb. 2). Mit P_x bezeichnen wir den an der Geraden x gespiegelten Punkt P.

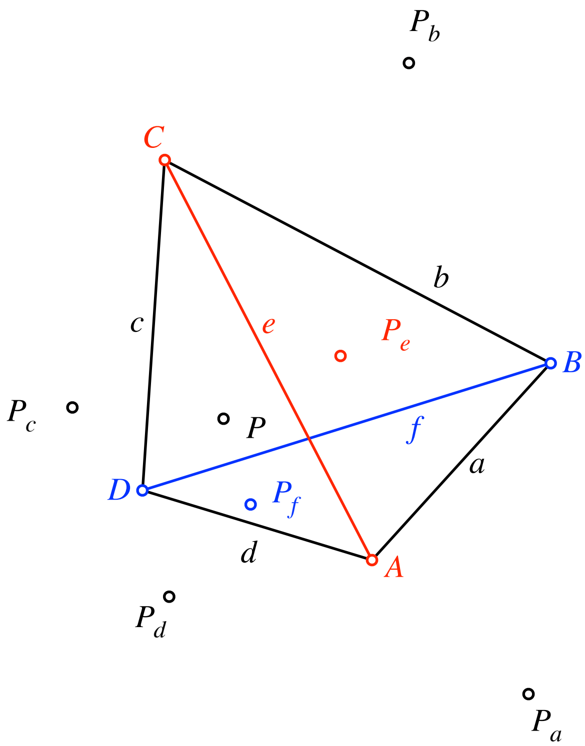

Abb. 2: Spiegeln an Geraden

Die farbig markierten Bildpunkte spiegeln wir weiter an den gleichfarbigen Eckpunkten des Viereckes. Mit P_{xY} bezeichnen wir den an der Ecke Y gespiegelten Punkt P_x.

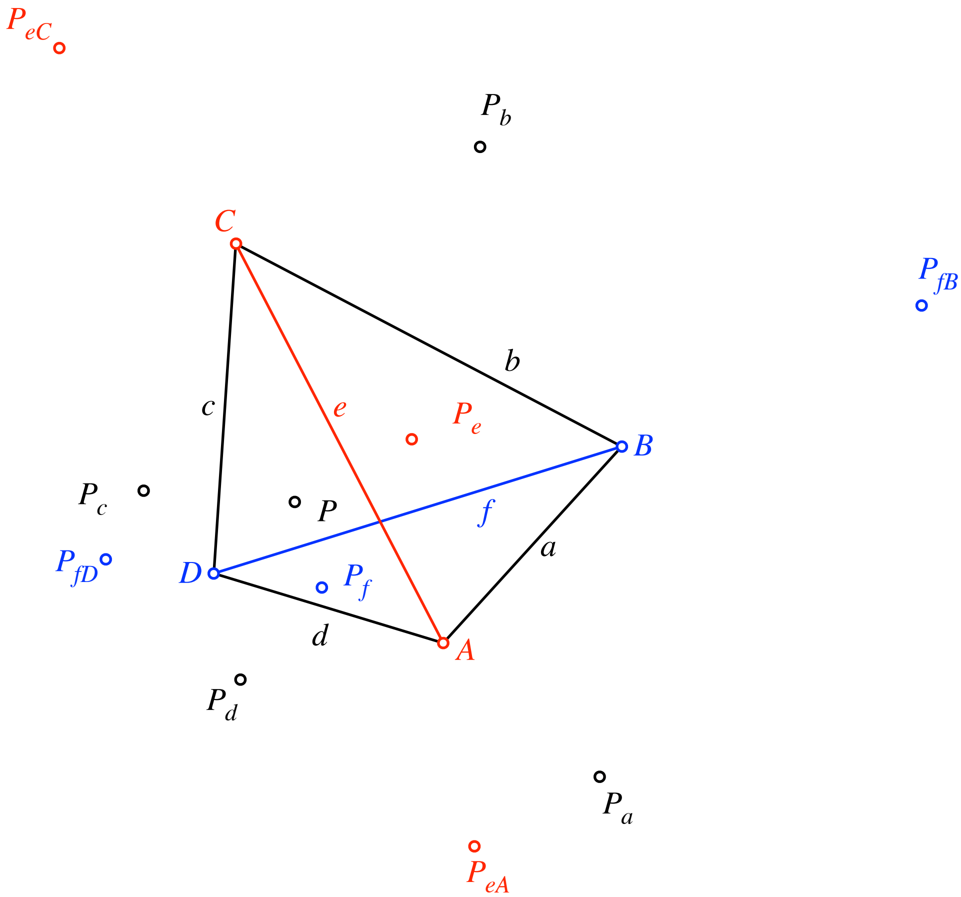

Abb. 3: Spiegeln an den Ecken

4 Parallelen

Die Strecke $P_{eA}P_{eC}$ ist parallel zur Diagonalen e und doppelt so lang (zentrische Streckung von P_e aus) (Abb. 4). Analog ist die Strecke $P_{fB}P_{fD}$ parallel zur Diagonalen f und doppelt so lang. Die beiden Strecken verlaufen durch den Punkt P.

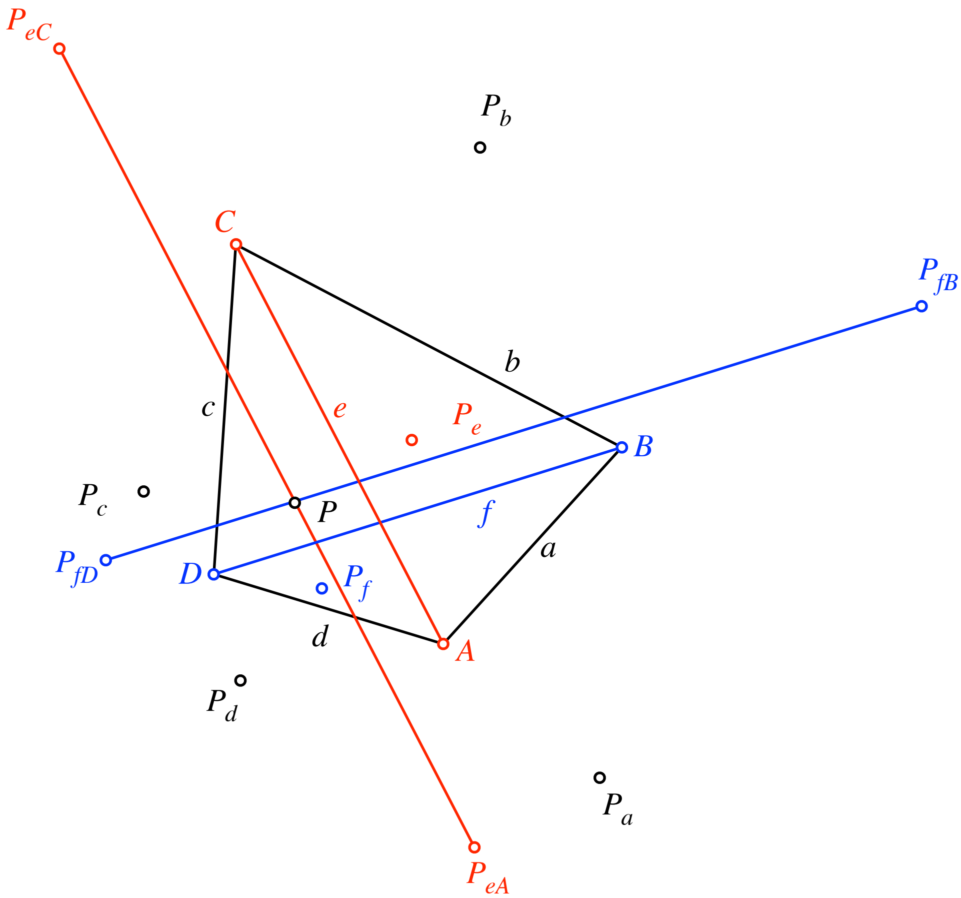

Abb. 4: Parallelen zu den Diagonalen

5 Vierecke

Wir zeichnen nun das Viereck $P_{eA}P_aP_eP_d$ (Abb. 5).

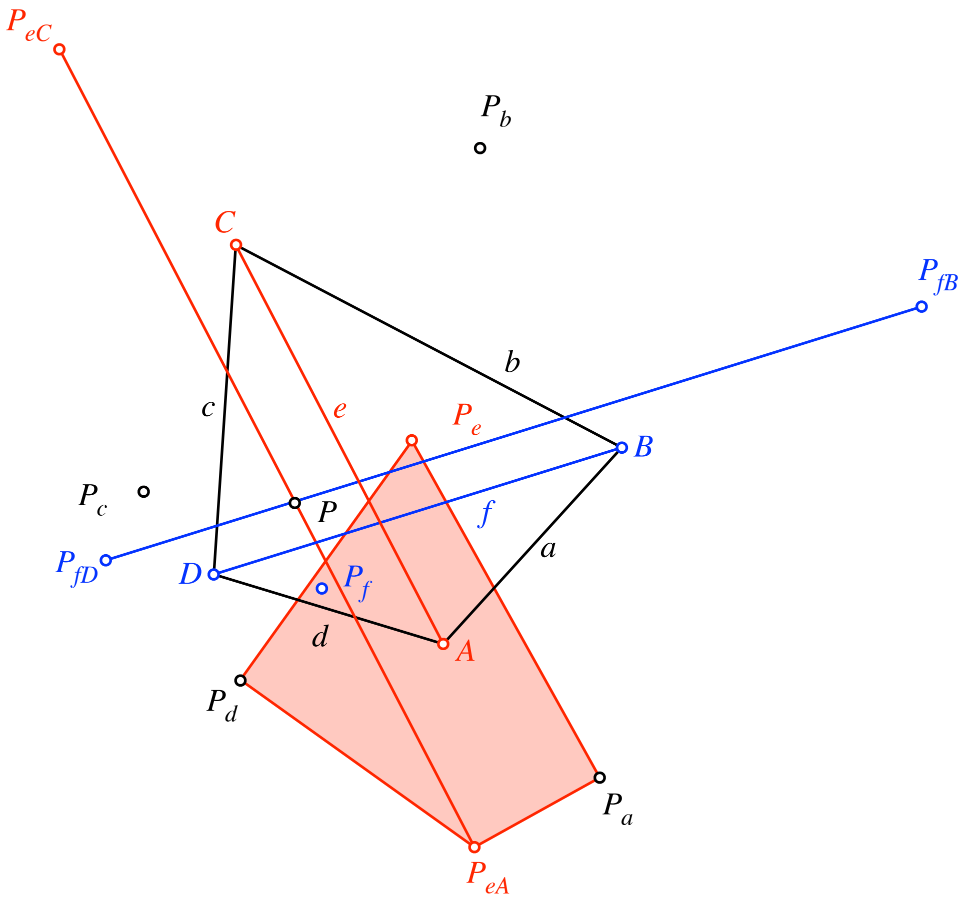

Abb. 5: Erstes Viereck

Dieses Viereck hat rechte Winkel an den Ecken P_a und P_d. Es ist daher ein Sehnenviereck (Abb. 6). Der Umkreis dieses Sehnenviereckes hat den Mittelunkt A. Er verläuft durch den Punkt P. (Das allgemeine Ausgangsviereck $ABCD$ (Abb. 1) ist aber kein Sehnenviereck.)

Der Winkel an der Ecke P_{eA} ist gleich groß wie der Winkel an der Ecke A des Ausgangsviereckes.

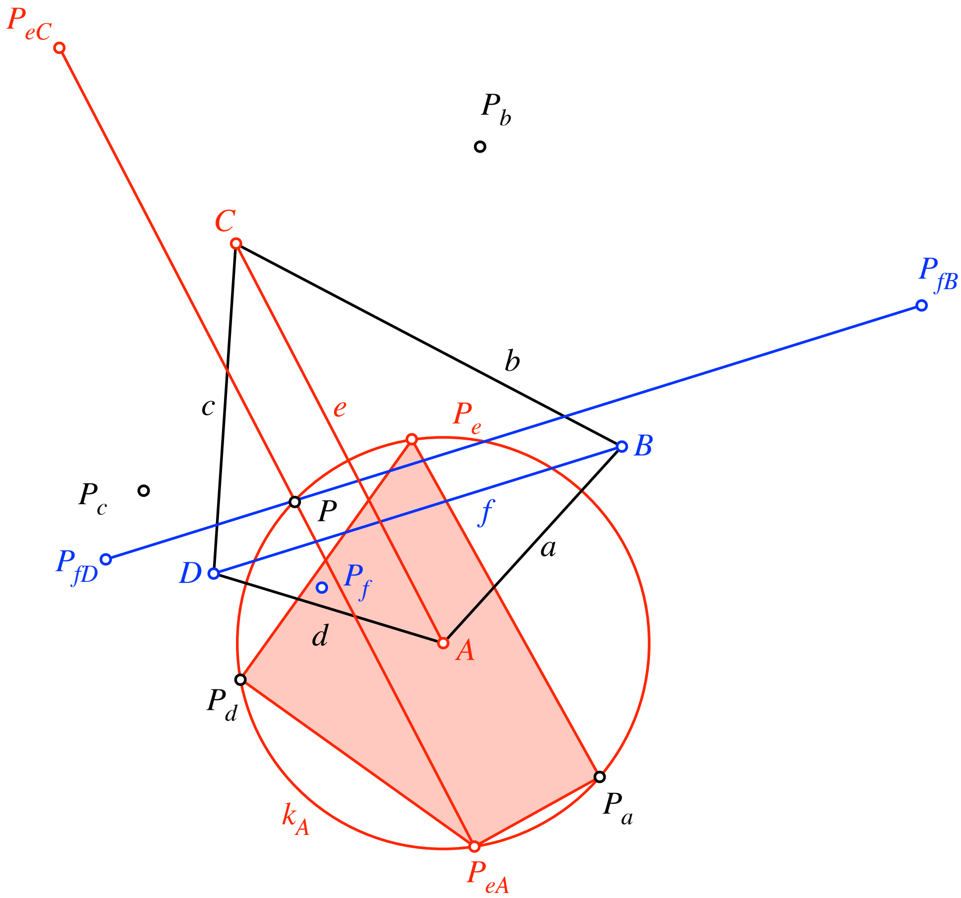

Abb. 6: Sehnenviereck

Analog können wir drei weitere Sehnenvierecke zeichnen (Abb. 7).

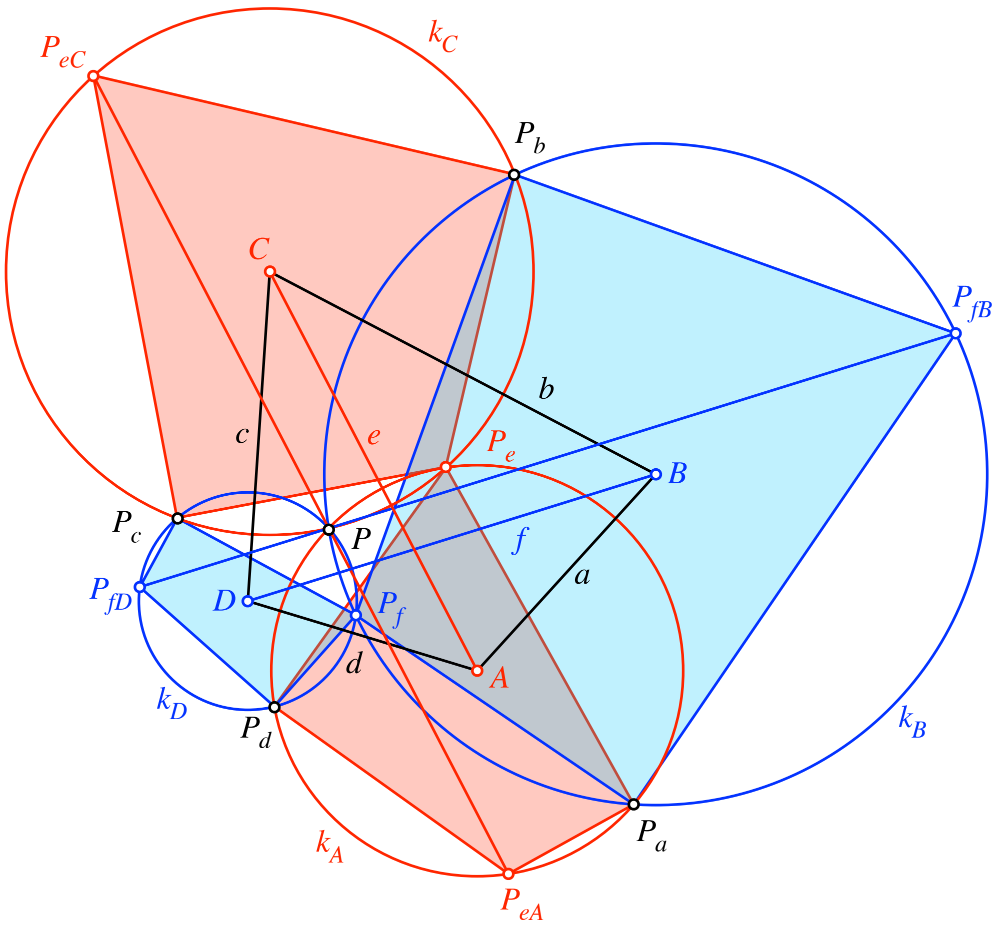

Abb. 7: Sehnenvierecke

Die Abbildung 8 zeigt die Figur ohne Beschriftung.

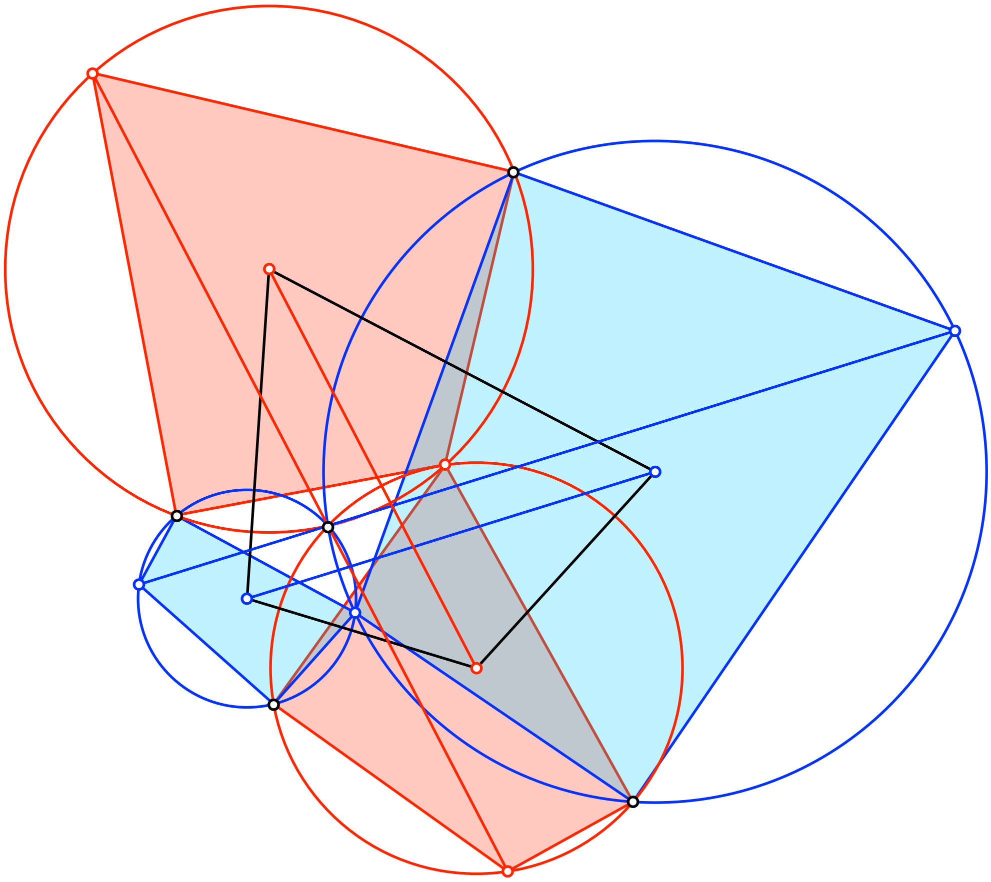

Abb. 8: Figur

6 Flächenornament

In der Abbildung 9 sind vier Kopien der Figur der Abbildung 8 zusammengesetzt. Zwei davon wurden punktgespiegelt. Dies ergibt die Basis eines Flächenornamentes.

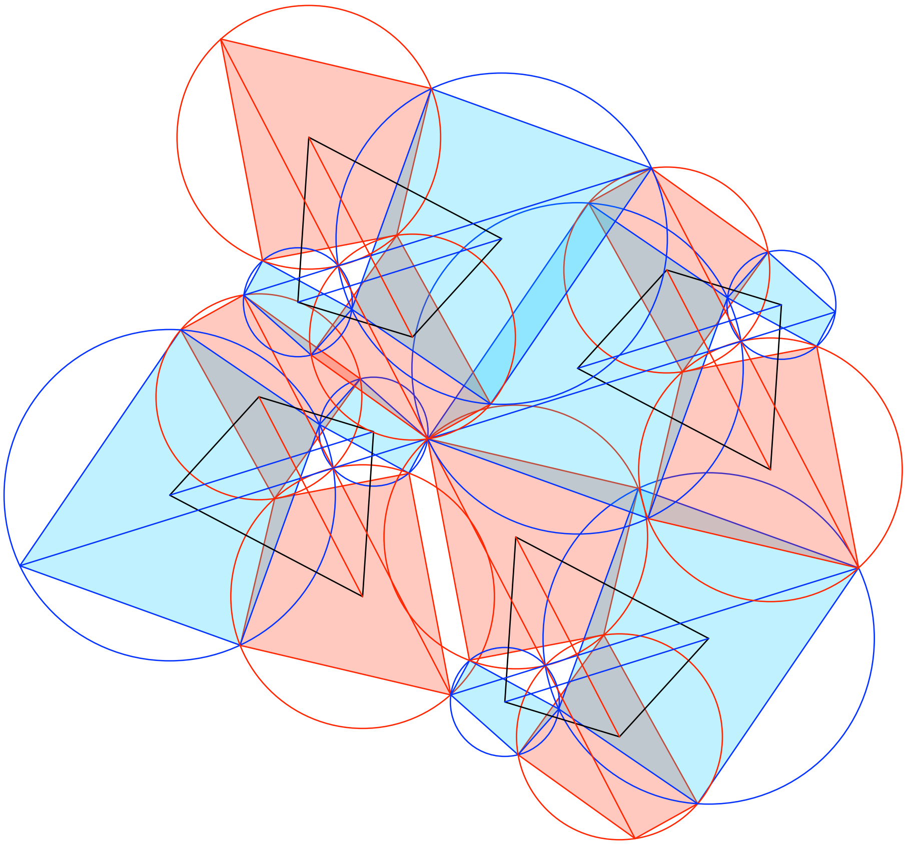

Abb. 9: Flächenornament, Basisteil

In der Abbildung 10 sind vier Kopien des Basisteils der Abbildung 9 zusammengesetzt.

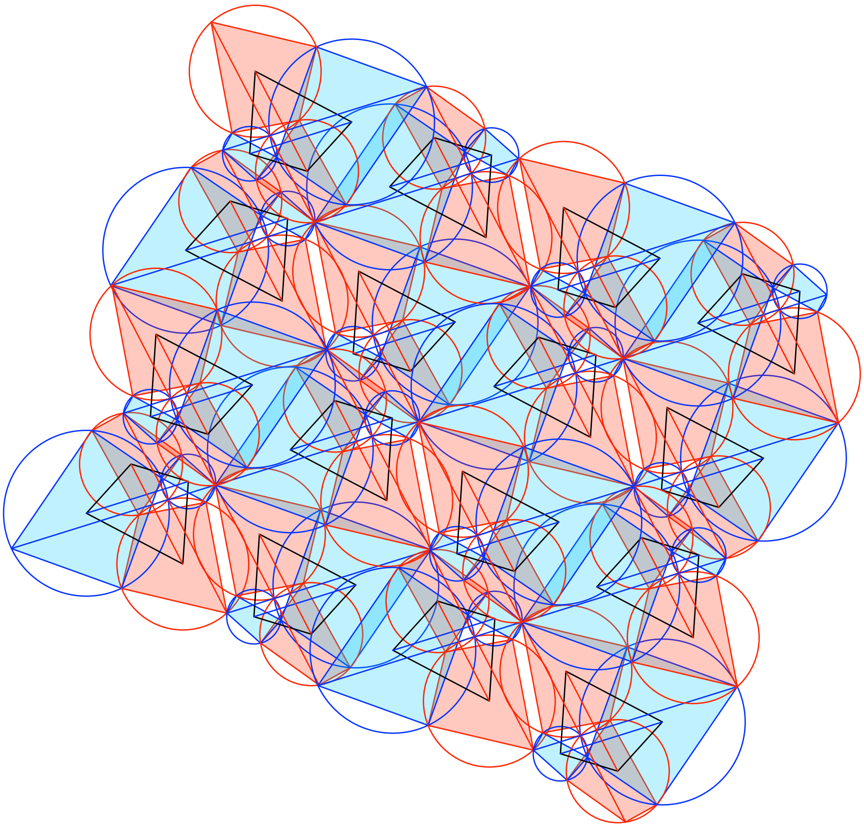

Abb. 10: Flächenornament

7 Winkeleigenschaft

Auf Grund der oben festgestellten Winkeleigenschaften können die Sehnenvierecke bündig um einen Punkt herum angeordnet werden (Abb. 11).

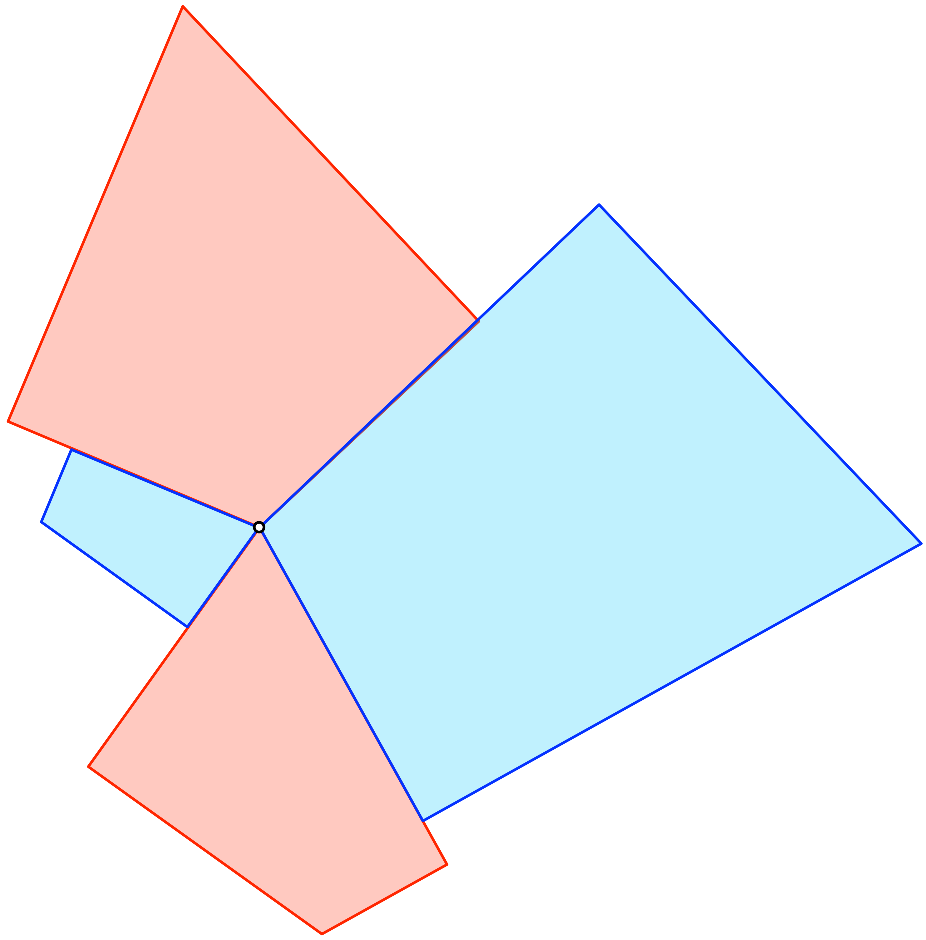

Abb. 11: Anordnung um einen Punkt

8 Spezielle Vierecke

Wir ersetzen das allgemeine Viereck der Abbildung 1 durch spezielle Vierecke.

8.1 Parallelogramm

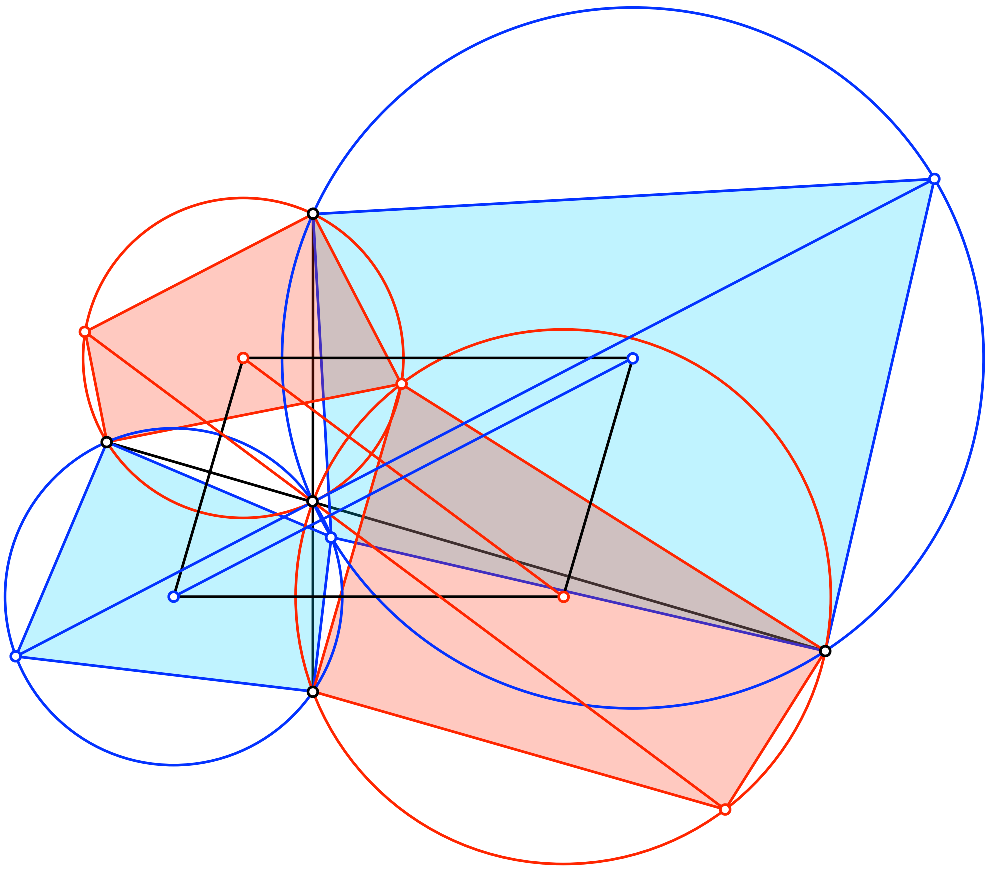

Abb. 12: Parallelogramm

Die schwarzen Strecken (gemäß Abb. 7 die Strecken P_aP_c und P_bP_d) verlaufen durch P und sind orthogonal zu den Parallelogrammseiten. Sie sind doppelt so lang wie die entsprechenden Höhen des Parallelogramms.

8.2 Rhombus

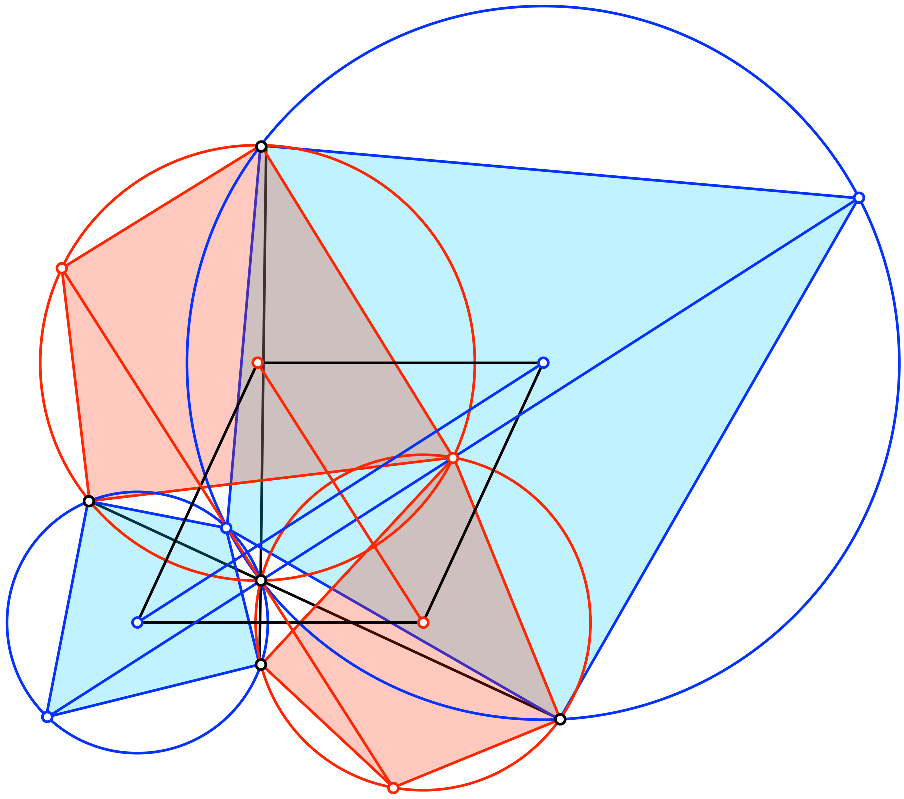

Abb. 13: Rhombus

Die Vierecke sind zueinander ähnliche Drachenvierecke. Die spitzen und stumpfen Winkel entsprechen denen des Rhombus.

8.3 Rechteck

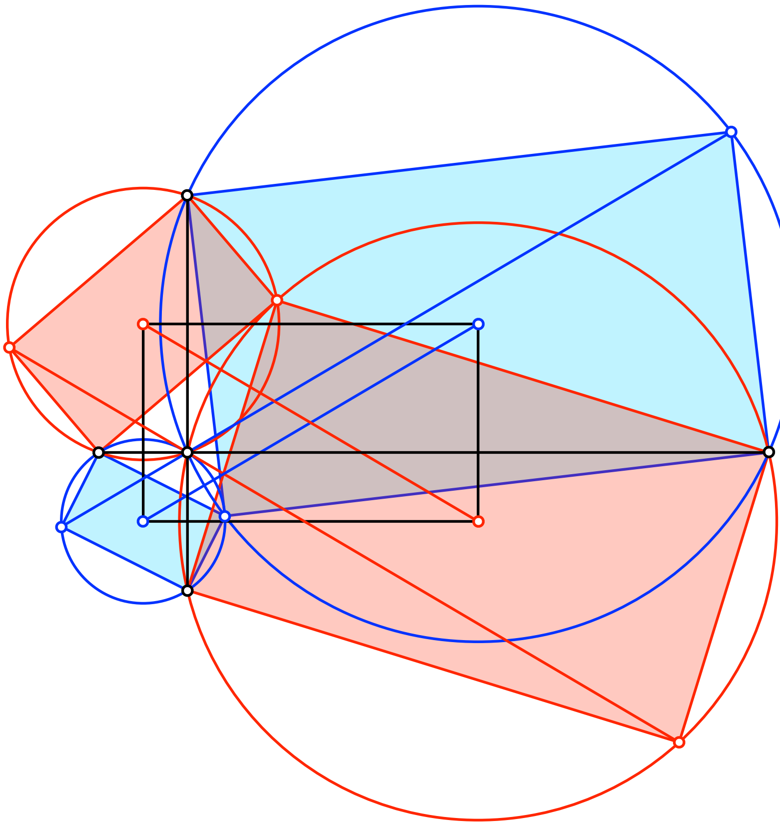

Abb. 14: Rechteck

Die Sehnenvierecke sind zueinander und zum Ausgangsrechteck ähnliche Rechtecke.

Die Flächensumme der beiden roten Rechtecke ist gleich groß wie die Flächensumme der beiden blauen Rechtecke.

Die beiden schwarzen Strecken (vgl. Abb. 12) sind Winkelhalbierende der Winkel zwischen der roten beziehungsweise blauen Strecke (vgl. Abb. 4). Diese rote beziehungsweise blaue Strecke ist gleich lang.

8.4 Quadrat

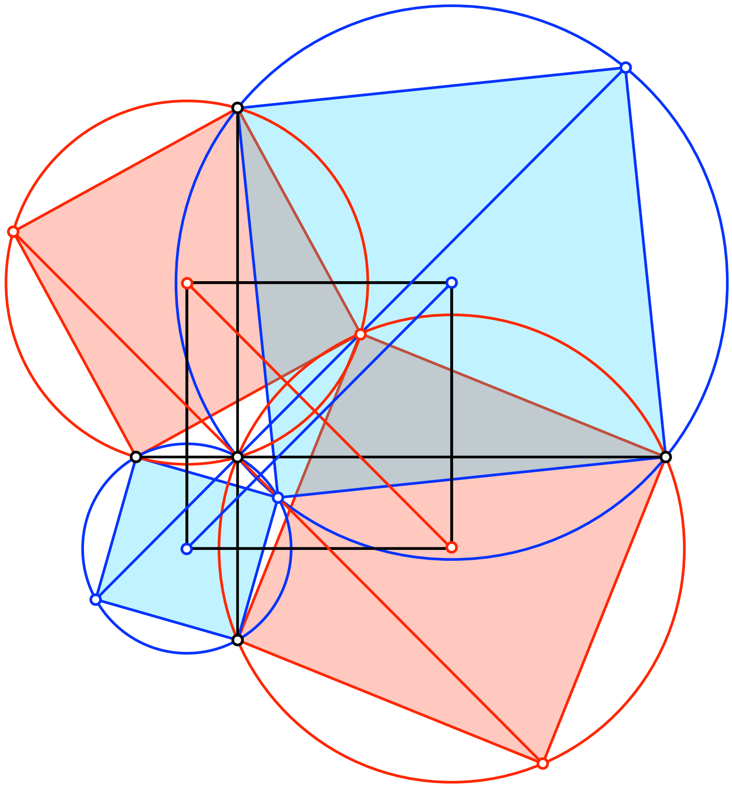

Abb. 15: Quadrat

Wir haben ausschließlich Quadrate.
Es gelten alle oben festgestellten Eigenschaften.