Hans Walser, [20210602]

Sphäroid

1 Worum geht es?

Die Kugel hat in Grund-, Auf- und Seitenriss einen Kreis als Kontur.

Die Umkehrung gilt nicht. Es wird ein Gegenbeispiel gegeben, also ein Körper, der keine Kugel ist, aber in Grund-, Auf- und Seitenriss je einen Kreis als Kontur hat.

2 Das Sphäroid

Das Sphäroid (Abb. 1 und 2) ist der Durchschnitt von drei Kreiszylindern mit gleichen Radien und paarweise orthogonalen Achsen. Wir arbeiten im Folgenden mit dem Radius 1.

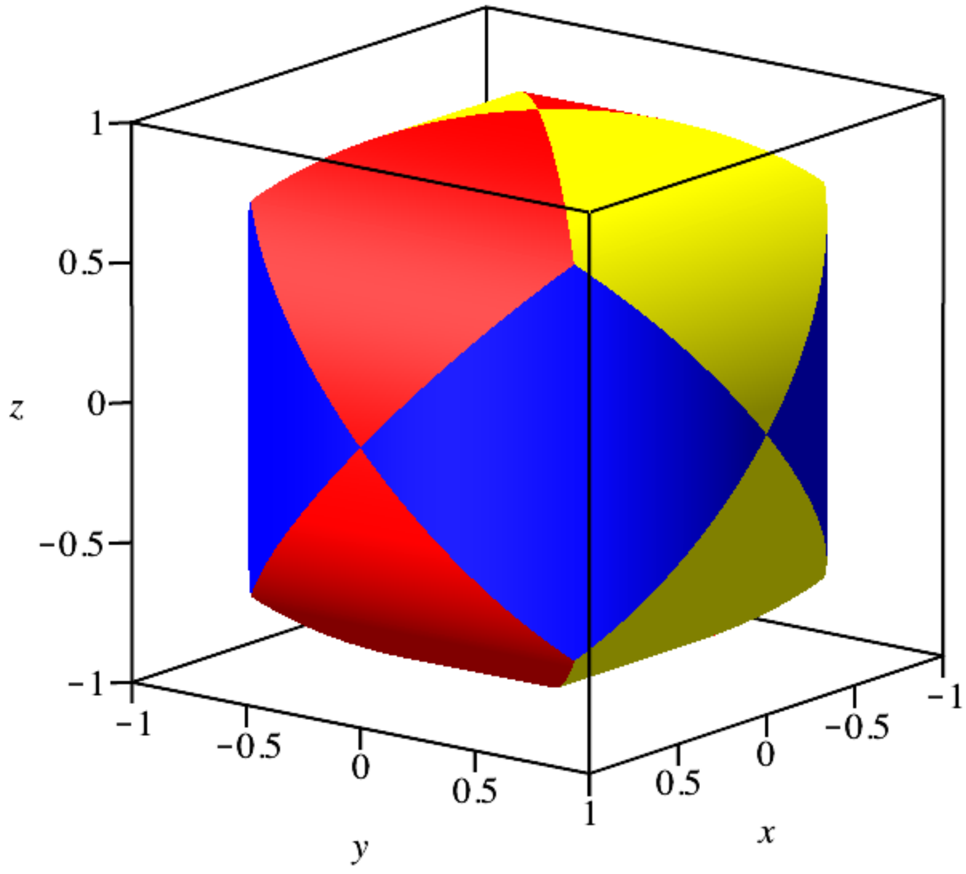

Abb. 1: Sphäroid

Der gelbe Zylinder hat die x-Achse als Zylinderachse, der rote Zylinder die y-Achse und der blaue Zylinder die z-Achse. Die einzelnen Oberflächen sind abwickelbar (Abb. 8 und 9).

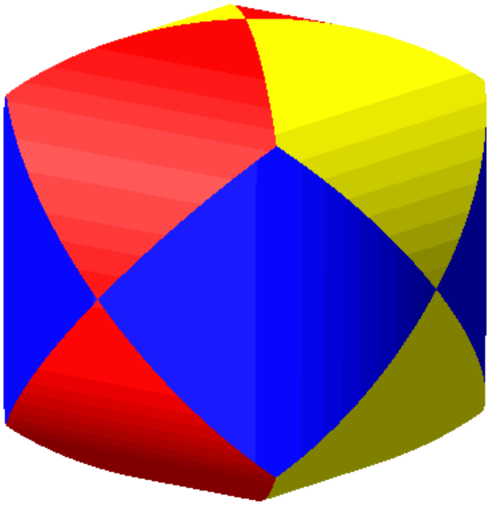

Abb. 2: Sphäroid

3 Risse

Die Abbildung 3 zeigt Grund-, Auf- und Seitenriss. Es fällt schwer, zu glauben, dass das *keine* Kugel sein soll.

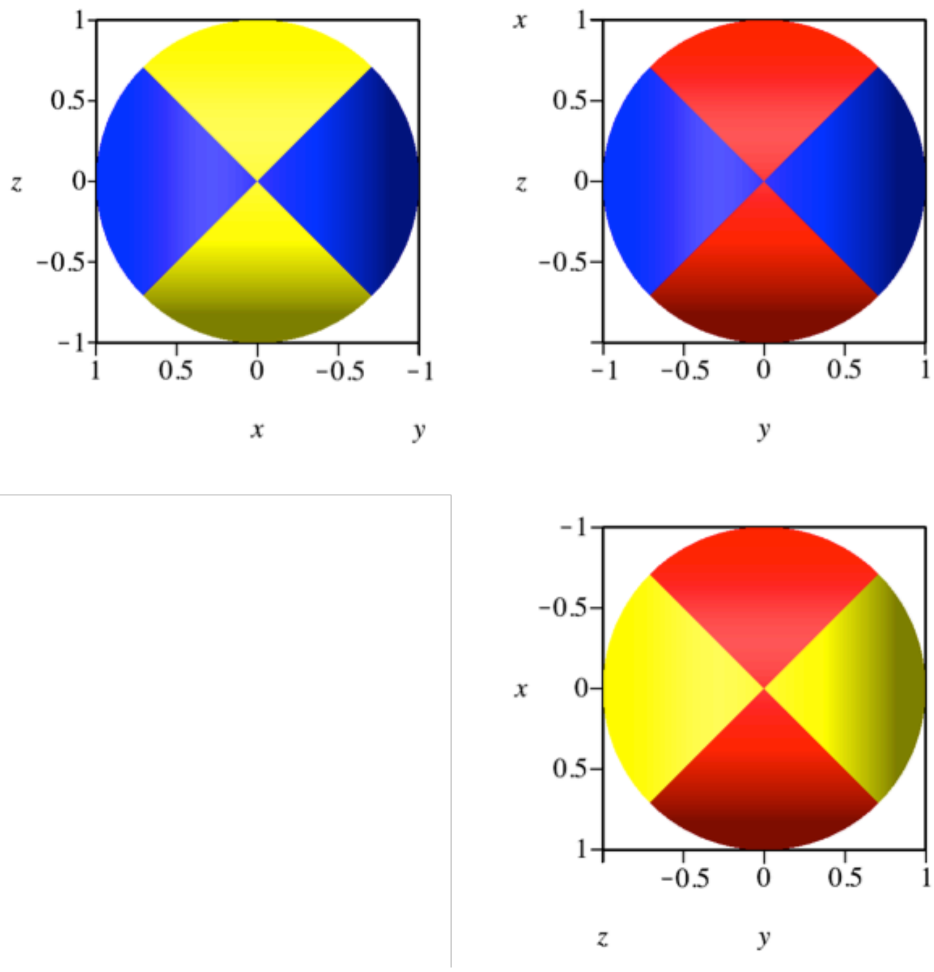

Abb. 3: Risse

4 Andere Sichten

Eine schräge Sicht (Abb. 4) macht aber deutlich, dass das keine Kugel ist. Man beachte die scheinbar verkürzten Skalierungen auf der x- und der y-Achse. Sie ergeben sich durch die schräge Sicht, Sehrichtung horizontal und mit einem Winkel 45° zur x-Achse.

.

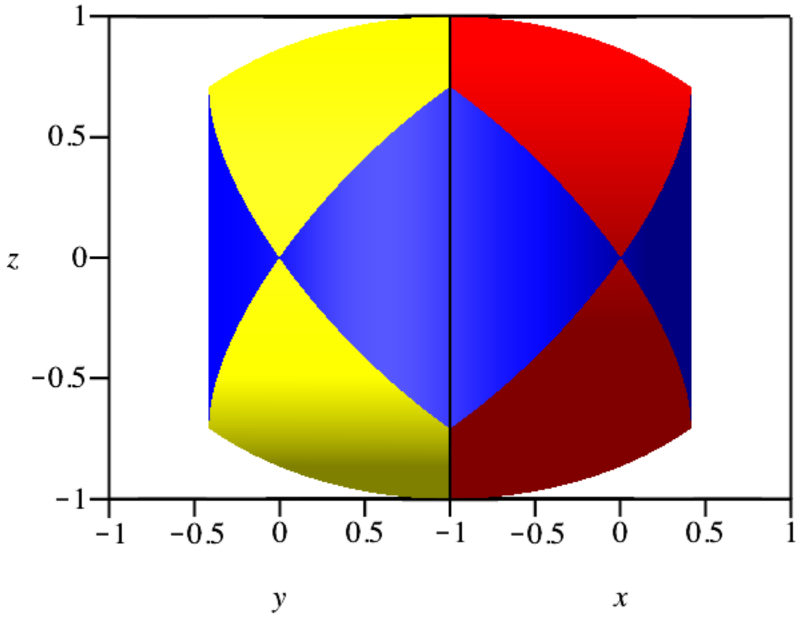

Abb. 4: Schräge Sicht

Die Figur, als zweidimensionales Bild gesehen, passt in ein Quadrat und hat einen Inkreis (Abb. 5).

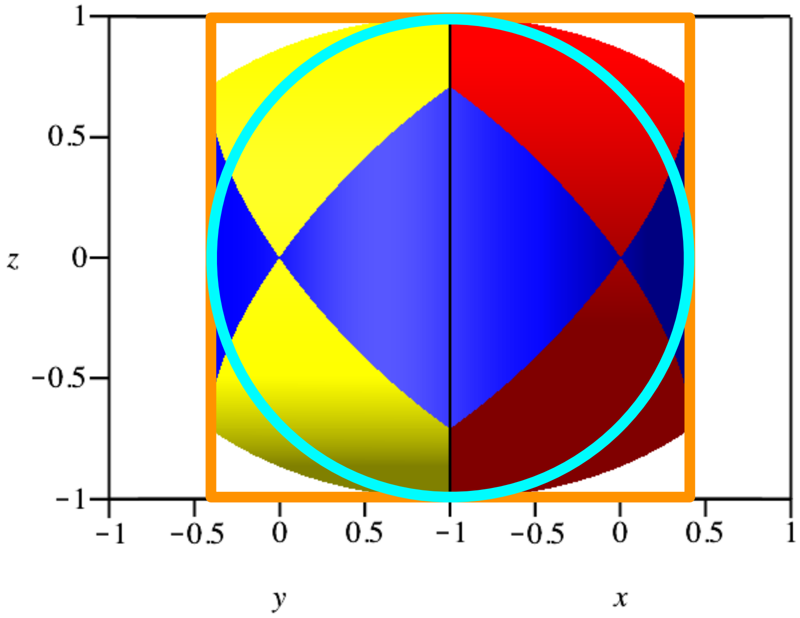

Abb. 5: Quadrat und Inkreis

5 Inkugel

In der Abbildung 6 fehlen die vier obersten gekrümmten Dreiecke, dafür ist die Inkugel eingezeichnet. Wir sehen Zwischenräume zwischen der Inkugel und dem Sphäroid.

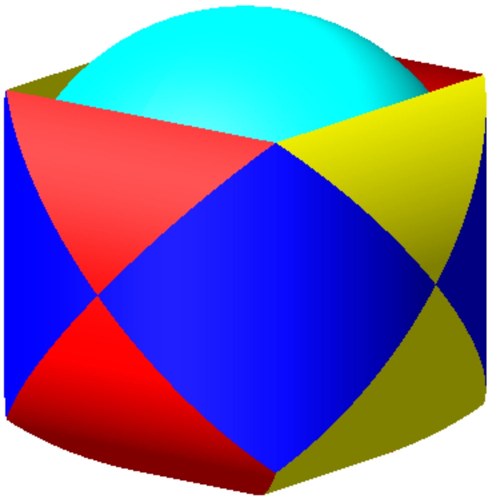

Abb. 6: Inkugel

Im Aufriss (Abb. 7) haben das Sphäroid und die Inkugel dieselbe Kontur.

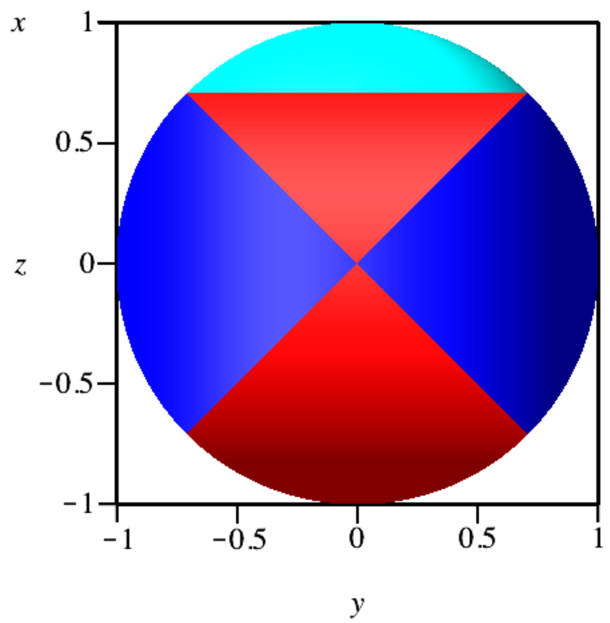

Abb. 7: Aufriss

6 Würfel

Das Sphäroid enthält auf seiner Oberfläche die Kanten eines Würfels (Abb. 8). Die Inkugel des Sphäroides berührt diese Kanten in der Mitte. Die Inkugel ist die sogenannte *Kantenmittenkugel* des Würfels. Der Würfel hat die Kantenlänge $\sqrt{2}$.

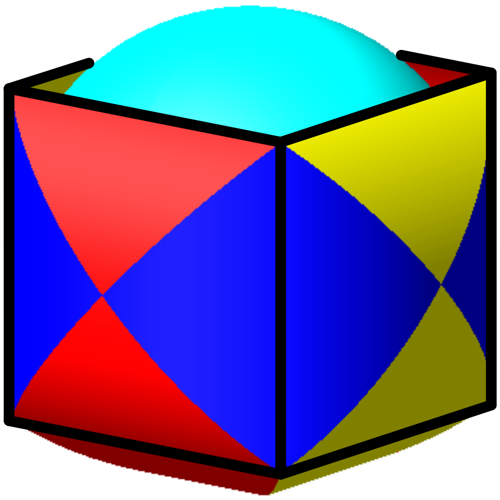

Abb. 8: Würfelkanten auf dem Sphäroid

7 Volumen und Oberfläche

7.1 Kreuzgewölbe

Wir können umgekehrt den in der Abbildung 8 weggeschnittenen Teil als Kreuzgewölbe dem Würfel aufsetzen (Abb. 9).

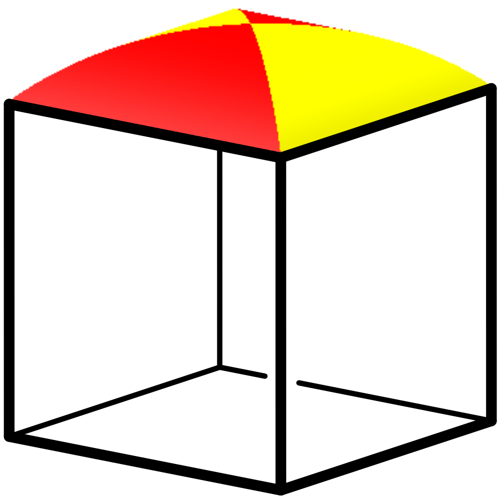

Abb. 9: Kreuzgewölbe

Die Niveaulinien des Kreuzgewölbes sind Quadrate. Auf der vom Würfelmittelpunt aus gemessenen Höhe h haben diese Quadrate die Seitenlänge $2\sqrt{1-h^2}$. Dabei läuft h von $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bis 1. Für das Volumen des Kreuzgewölbes ergibt sich damit:

$$V_{\text{Kreuzgewölbe}} = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} 4\left(1-h^2\right)\mathrm{d}h = \tfrac{8}{3} - \tfrac{5}{3}\sqrt{2}$$

Das Sphäroid setzt sich aus dem Würfel und sechs Kreuzgewölben zusammen. Für sein Volumen V erhalten wir daher:

$$V = \sqrt{2}^3 + 6\left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{5}{3}\sqrt{2}\right) = 16 - 8\sqrt{2} \approx 4.6863$$

7.2 Abwicklung

Die Abbildung 10 gibt die Abwicklung des Sphäroides.

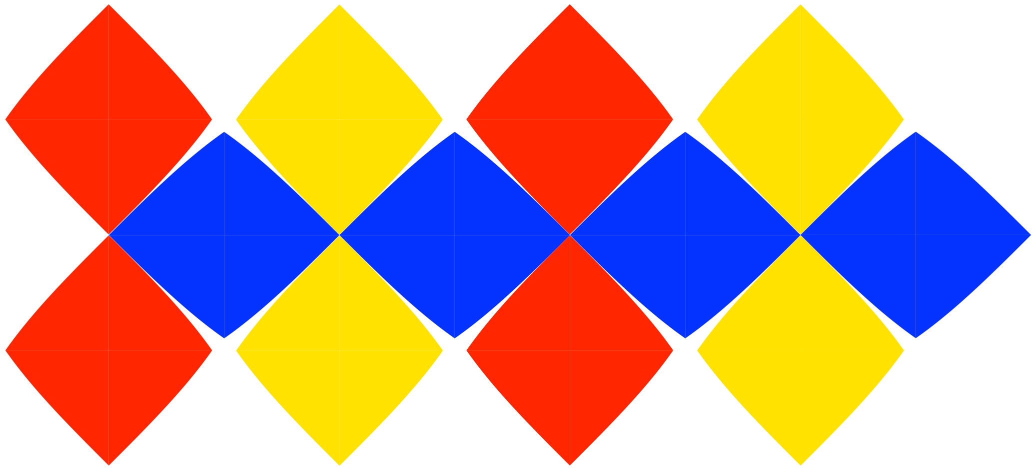

Abb. 10: Abwicklung

Die Randkurven der Einzelteile sind Sinus- und Kosinuskurven (Abb. 11).

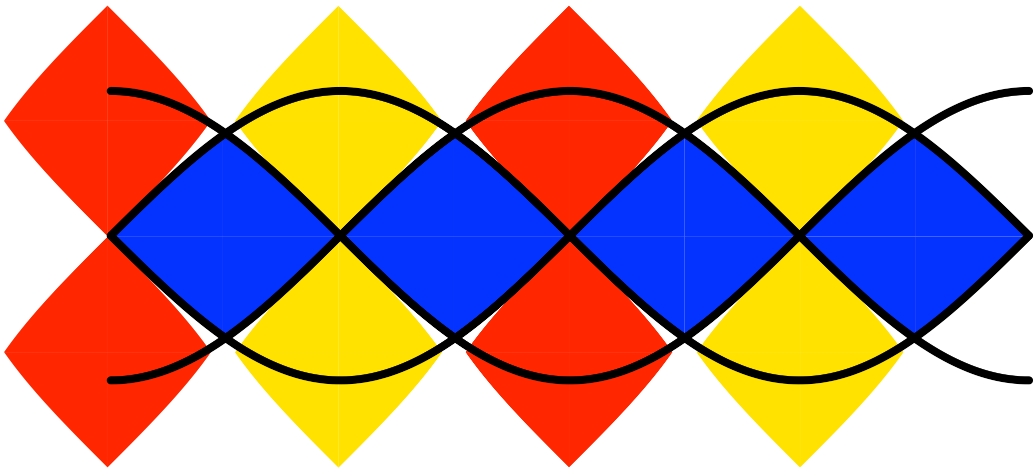

Abb. 11: Randkurven

Für die Oberfläche S des Sphäroides ergibt sich daher:

$$S = 48\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 48 - 24\sqrt{2} \approx 14.0589$$

Weder beim Volumen noch bei der Oberfläche kommt die Kreiszahl π vor, dafür die ebenfalls irrationale Zahl $\sqrt{2}$.

Websitoid

Hans-Jürgen Elschenbroich: Konoid
https://www.geogebra.org/m/y57fhddh
Hans-Jürgen Elschenbroich: Konoid 2
https://www.geogebra.org/m/gqfnnhfe
Hans-Jürgen Elschenbroich: Konoidmantel
https://www.geogebra.org/m/y57fhddh
Hans Walser: Dreitafelprojektion
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dreitafelprojektion/Dreitafelprojektion.htm
Hans Walser: Hyperboloid-Stern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/H/Hyperboloid-Stern/Hyperboloid-Stern.htm
Hans Walser: Pyramidoid
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyramidoid/Pyramidoid.htm
Hans Walser: Paraboloid-Stern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Paraboloid-Stern/Paraboloid-Stern.htm
Hans Walser: Rund ohne π
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/R/Rund_ohne_Pi/Rund_ohne_Pi.htm