Hans Walser, [20201207]

Schwerpunkte im Viereck

1 Worum geht es?

Formeln für verschiedene spezielle Punkte im Viereck, basierend auf den Eckpunktkoordinaten

2 Schreibweise in Koordinaten

$P = (x_P, y_P)$

3 Dreieck

Im Dreieck ABC sind der Eckenschwerpunkt und der Flächenschwerpunkt dieselben, kurz Dreieckschwerpunkt $S = S(A, B, C) = (x_S, y_S)$ geheißen. Der Kantenschwerpunkt ist anders.

Berechnung: Arithmetisches Mittel der Eckpunktkoordinaten

$$x_S = 1/3\ (x_A + x_B + x_C)$$

$$y_S = 1/3\ (y_A + y_B + y_C)$$

4 Viereck

Viereck $ABCD$

4.1 Eckenschwerpunkt

Berechnung: Arithmetisches Mittel der Eckpunktkoordinaten

$E = E(A, B, C, D) = (x_E, y_E)$

$$x_E = \tfrac{1}{4}\ (x_A + x_B + x_C + x_D)$$

$$y_E = \tfrac{1}{4}\ (y_A + y_B + y_C + y_D)$$

4.2 Diagonalenschnittpunkt

Berechnung: Schnittpunkt der Geraden AC und BD

$X = X(A, B, C, D) = (x_X, y_X)$

$$x_X = (((y_C - y_D)\, x_B + x_D\, (y_B - y_C))\, x_A - ((y_A - y_D)\, x_B - x_D\, (y_A - y_B))\, x_C)/((y_B - y_D)\, x_A + (-y_A + y_C)\, x_B + (-y_B + y_D)\, x_C + x_D\, (y_A - y_C))$$

$$y_X = (((-x_C + x_D)\, y_B - y_D\, (x_B - x_C))\, y_A + ((x_A - x_D)\, y_B - y_D\, (x_A - x_B))\, y_C)/((-x_B + x_D)\, y_A + (x_A - x_C)\, y_B + (x_B - x_D)\, y_C - y_D\, (x_A - x_C))$$

4.3 Flächenschwerpunkt

$F = F(A, B, C, D) = (x_F, y_F)$

Konstruktion und Berechnung: Wir unterteilen das Viereck mit der Diagonalen AC in zwei Dreiecke. Durch deren Schwerpunkte legen wir eine Gerade. Dann unterteilen wir das Viereck mit der Diagonalen BD in zwei Dreiecke. Durch deren Schwerpunkte legen wir eine zweite Gerade. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Flächenschwerpunkt:

$$F(A, B, C, D) = X(S(A, B, C), S(A, B, D), S(A, C, D), S(B, C, D))$$

$$x_F = ((y_B - y_D)\, x_A^2 + ((-y_A + y_B)\, x_B + x_D\, (y_A - y_D))\, x_A + (-y_A + y_C)\, x_B^2 - x_C\, (y_B - y_C)\, x_B + (-y_B + y_D)\, x_C^2 - x_D\, (y_C - y_D)\, x_C + x_D^2\, (y_A - y_C))/((3\, y_B - 3\, y_D)\, x_A + (-3\, y_A + 3\, y_C)\, x_B + (-3\, y_B + 3\, y_D)\, x_C + 3\, x_D\, (y_A - y_C))$$

$$y_F = ((-x_B + x_D)\, y_A^2 + ((x_A - x_B)\, y_B - y_D\, (x_A - x_D))\, y_A + (x_A - x_C)\, y_B^2 + y_C\, (x_B - x_C)\, y_B + (x_B - x_D)\, y_C^2 + y_D\, (x_C - x_D)\, y_C - y_D^2\, (x_A - x_C))/((-3\, x_B + 3\, x_D)\, y_A + (3\, x_A - 3\, x_C)\, y_B + (3\, x_B - 3\, x_D)\, y_C - 3\, y_D\, (x_A - x_C))$$

Die Abbildung 1 zeigt ein Viereck mit dem Eckenschwerpunkt (schwarz), dem Diagonalenschnittpunkt (blau) und dem Flächenschwerpunkt (rot).

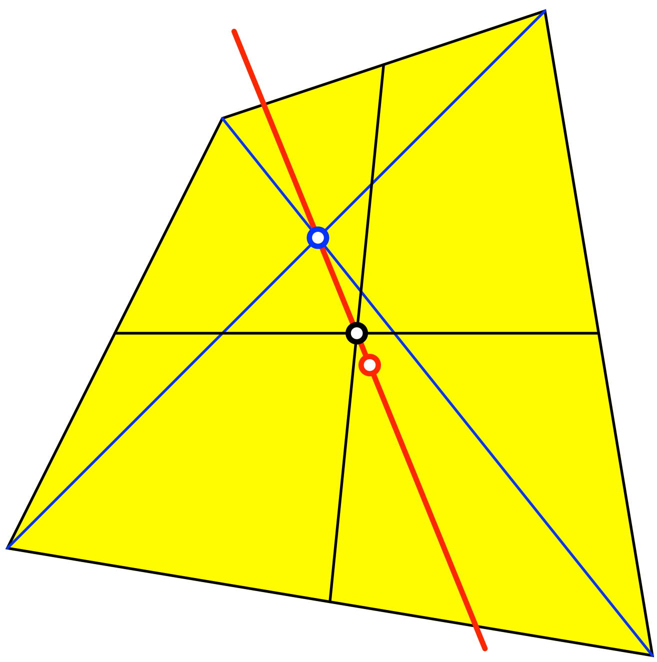

Abb. 1: Viereck

Die drei Punkte liegen auf einer Geraden (Seebach 1994). Der Eckenschwerpunkt teilt die Strecke vom Diagonalenschnittpunkt zum Flächenschwerpunkt im Verhältnis 3:1.

Literatur

Fritsch, Rudolf (2012): Zum Flächenschwerpunkt für Vierecke. Der mathematische und natur-wissenschaftliche Unterricht 65, 2012, S. 464–465.

Fritsch, Rudolf und Pickert, Günter (2014): Schwerpunkte von Vierecken. Die Wurzel, Heft 2 / 2014, 35-41.

Kirsch, A. (1987): Bemerkungen zum Vierecksschwerpunkt. *Didaktik der Mathematik, 15*, 34-36.

Kratz, Johannes (1994): „Das Schwerpunktsviereck" – Eine Ergänzung zum Beitrag von Karl Seebach über Viereckschwerpunkte. Didaktik der Mathematik 22, 1994, S. 316–317.

Pickert, Günter (2013): Zu: Zum Flächenschwerpunkt für Vierecke. Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 66, 2013, Seiten 51–52.

Seebach, Karl (1983): Über Schwerpunkte von Dreiecken, Vierecken und Tetraedern, Teil 1. Didaktik der Mathematik 11, 1983, S. 270–282.

Seebach, Karl (1994): Nochmals: Viereckschwerpunkte. Didaktik der Mathematik 22, 1994, S. 309–315.

Walser, Hans (2012): Schwerpunkt. *Mathematikinformation*, 57, 14-22. ISSN 1612-9156.

Walser, Hans (2014): Flächenschwerpunkte. *MNU, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*. 67. Dezember 2014, S. 466-467.

Website

Hans Walser: Flächenschwerpunkt Trapez

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/F/Flaechenschwerpunkt_Trapez/Flaechenschwerpunkt_Trapez.htm