Hans Walser, [20220724]

Rhombentriakontaeder

1 Worum geht es?

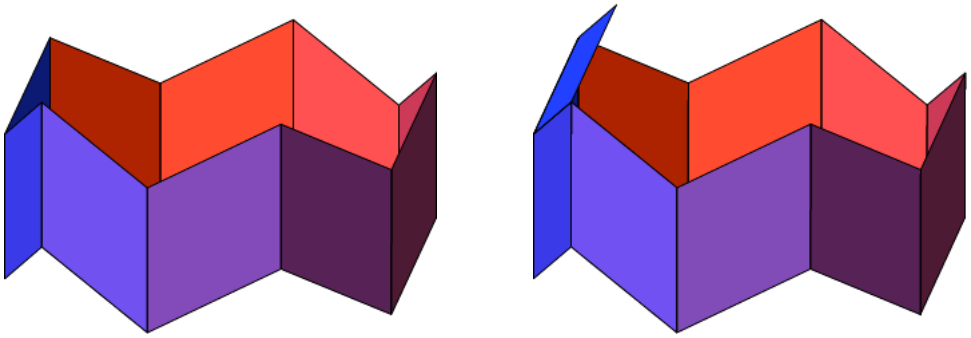
Neben dem gewöhnlichen Rhombentriakontaeder gibt es ein zweites, nicht konvexes Rhombentriakontaeder, das von denselben dreißig Rhomben begrenzt ist. Der Übergang von konvexen zum nicht konvexen Rhombentriakontaeder entspricht dem Übergang vom regelmäßigen Fünfeck (Pentagon) zum Pentagramm.

Weiter kann ein nicht konvexes Rhombenikosaeder hergeleitet werden.

2 Konstruktion des Rhombentriakontaeders

Das Rhombentriakontaeder ist von dreißig kongruenten Rhomben begrenzt. Die Rhomben haben das Diagonalenverhältnis im Goldenen Schnitt und den spitzen Winkel $\arctan(2) \approx 63.435°$. Die nachfolgende Konstruktion des Rhombentriakontaeders kann dann leicht für das nicht konvexe Rhombentriakontaeder adaptiert werden.

Wir beginnen mit einem zickzackförmigen Kranz mit zehn kongruenten Rhomben (Abb. 1a). Von oben sehen wir ein regelmäßiges Zehneck (Abb. 3a).

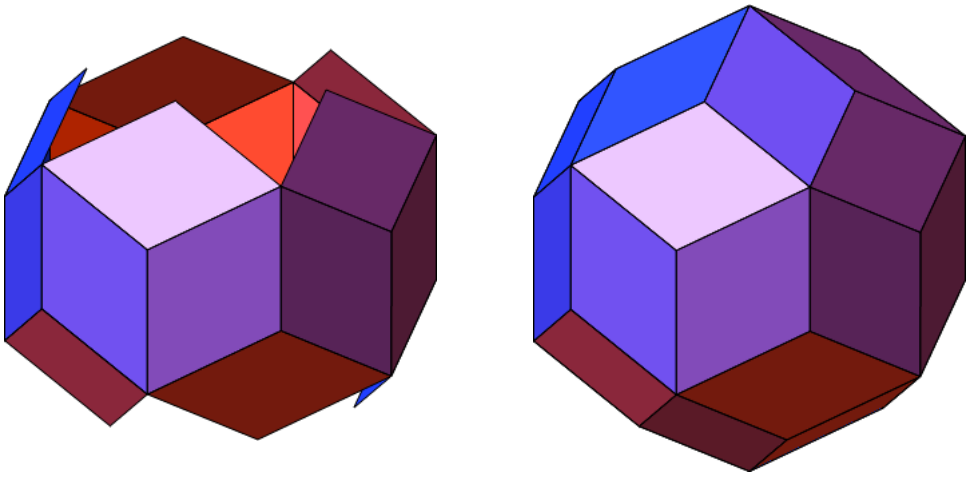


a) b)

Abb. 1: Rhombenkranz

In eine Zackenlücke des oberen Randes passt genau ein weiterer kongruenter Rhombus (Abb. 1b). Der Nachweis des Einpassens geschieht rechnerisch.

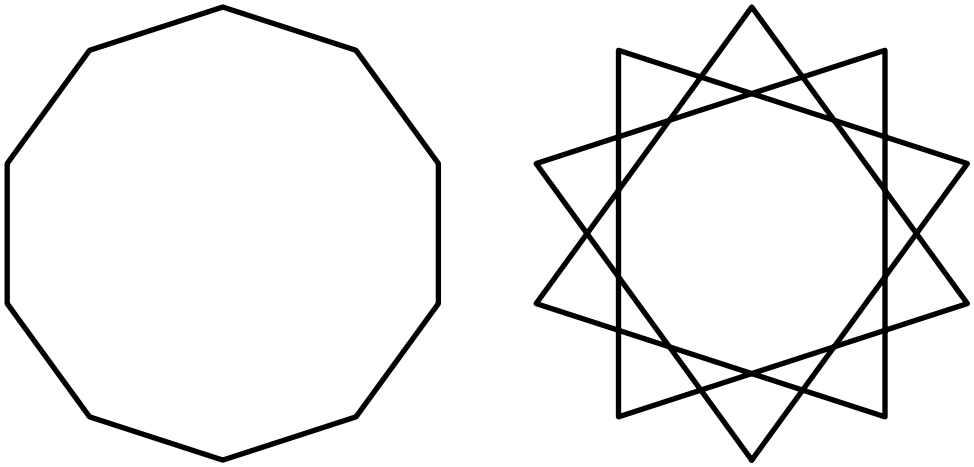
Wir können nun in alle Zackenlücken oben und unten je einen Rhombus einpassen (Abb. 2a). Es ergeben sich zwei Kränze zu je fünf kongruenten Rhomben.



a) b)

Abb. 2: Weitere Rhombenkränze

In die neu entstandenen Zickzacklinien oben und unten können wir je einen weiteren Kranz zu fünf Rhomben einpassen (Abb. 2b). Diese Rhomben schließen sich oben und unten zu einem Punkt zusammen. Somit haben wir das Rhombentriakontaeder erhalten.

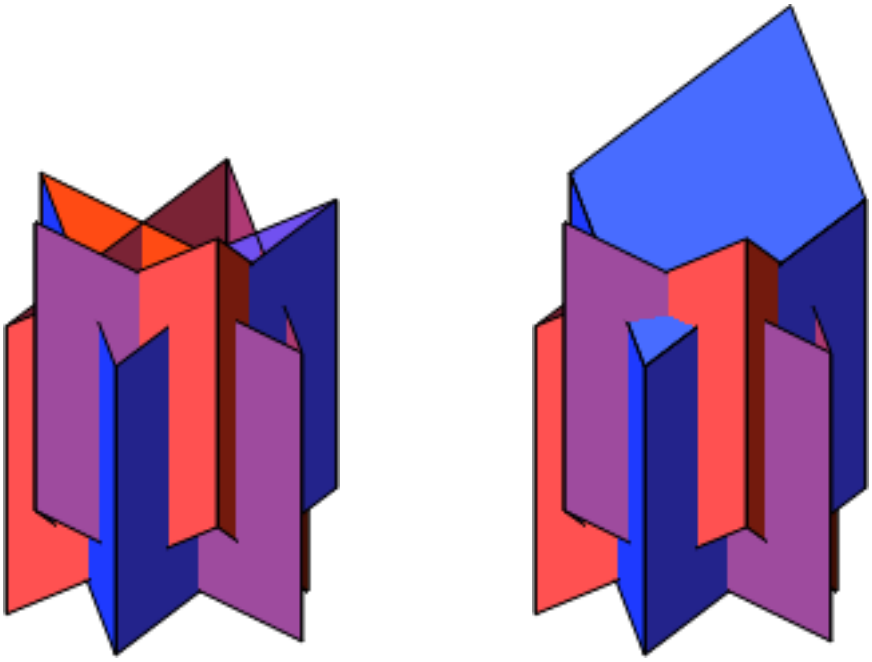


a) b)

Abb. 3: Zehneck und Zehnstern

3 Das nicht konvexe Rhombentriakontaeder

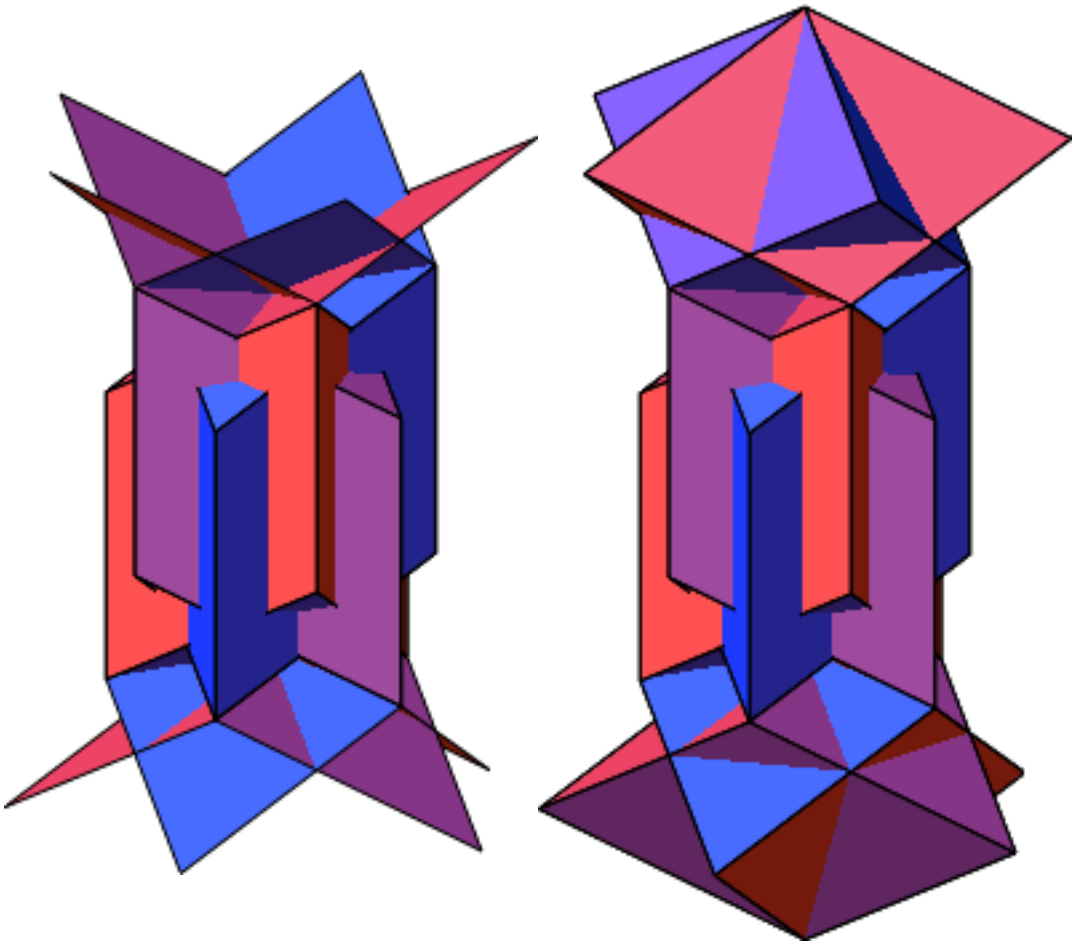
Der Unterschied ist gleich am Anfang. Der Kranz der zehn Rhomben überscheidet sich und hat insgesamt drei Umgänge (Abb. 4a). Von oben sehen wir einen regelmäßigen Stern mit zehn Spitzen (Abb. 3b).



a) b)

Abb. 4: Selbstüberschneidung

In die Zickzacklinie des oberen Randes können wir einen weiteren kongruenten Rhombus einpassen (Abb. 4b). Insgesamt können wir zwei Kränze zu je fünf Rhomben einpassen (Abb. 5a). Im nächsten Schritt schließt sich die Figur zum nicht konvexen Rhombentriakontaeder (Abb. 6b).

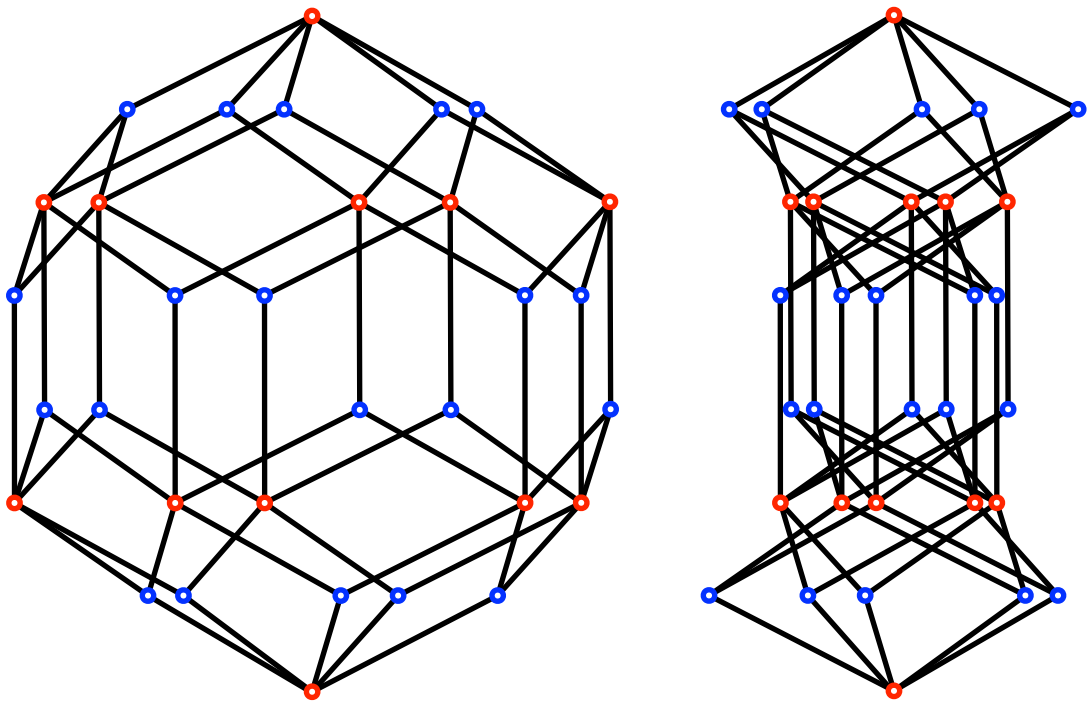


a) b)

Abb. 5: Das nicht konvexe Rhombentriakontaeder

4 Vergleich der beiden Rhombentriakontaeder

Die beiden Rhombentriakontaeder bestehen aus denselben Rhomben. Bei gleicher Kantenlänge der Rhomben haben beide Körper denselben Abstand vom Mittelpunkt zu den Polen. Bei der Kantenlänge 1 ist dieser Abstand = $\Phi \approx 1.618$ (Goldener Schnitt). Die Topologie der Ecken und Kanten ist bei beiden Körpern gleich (Abb. 6). Es gibt Ecken (rot), in denen fünf Kanten einlaufen und Ecken (blau) in denen drei Kanten einlaufen. Die entsprechenden Ecken sind auf demselben Niveau.



a) b)

Abb. 6: Kantenmodelle

Die Lage der Rhomben ist allerdings unterschiedlich:

Beim konvexen Rhombentriakontaeder kommen an den beiden Polen und allgemein an den roten Ecken je fünf Rhomben mit ihren spitzen Winkeln zusammen. An den blauen Ecken kommen je drei Rhomben mit ihren stumpfen Winkeln zusammen.

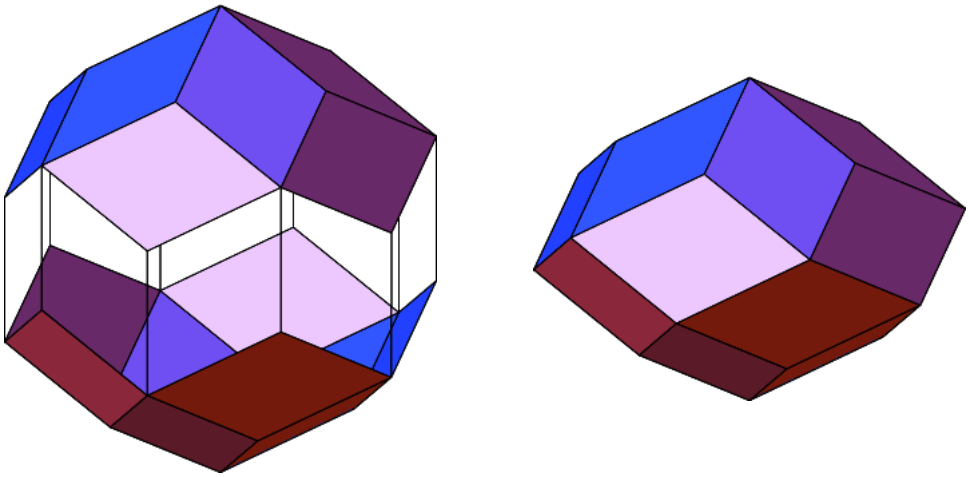
Beim nicht konvexen Rhombentriakontaeder ist es umgekehrt. An den Polen und allgemein an den roten Ecken kommen je fünf Rhomben mit ihren stumpfen Winkeln zusammen und entsprechend an den blauen Ecken je drei Rhomben mit ihren spitzen Winkeln.

Das konvexe Rhombentriakontaeder hat mehr Drehsymmetrien. Jede Achse durch zwei diametrale rote Punkte führt zu einer fünfteiligen Drehsymmetrie, jede Achse durch zwei blaue Punkte zu einer dreiteiligen Drehsymmetrie. Beim nicht konvexen Rhom-

bentriakontaeder führt lediglich die Achse durch die beiden Pole zu einer fünfteiligen Drehsymmetrie.

5 Rhombenikosaeder

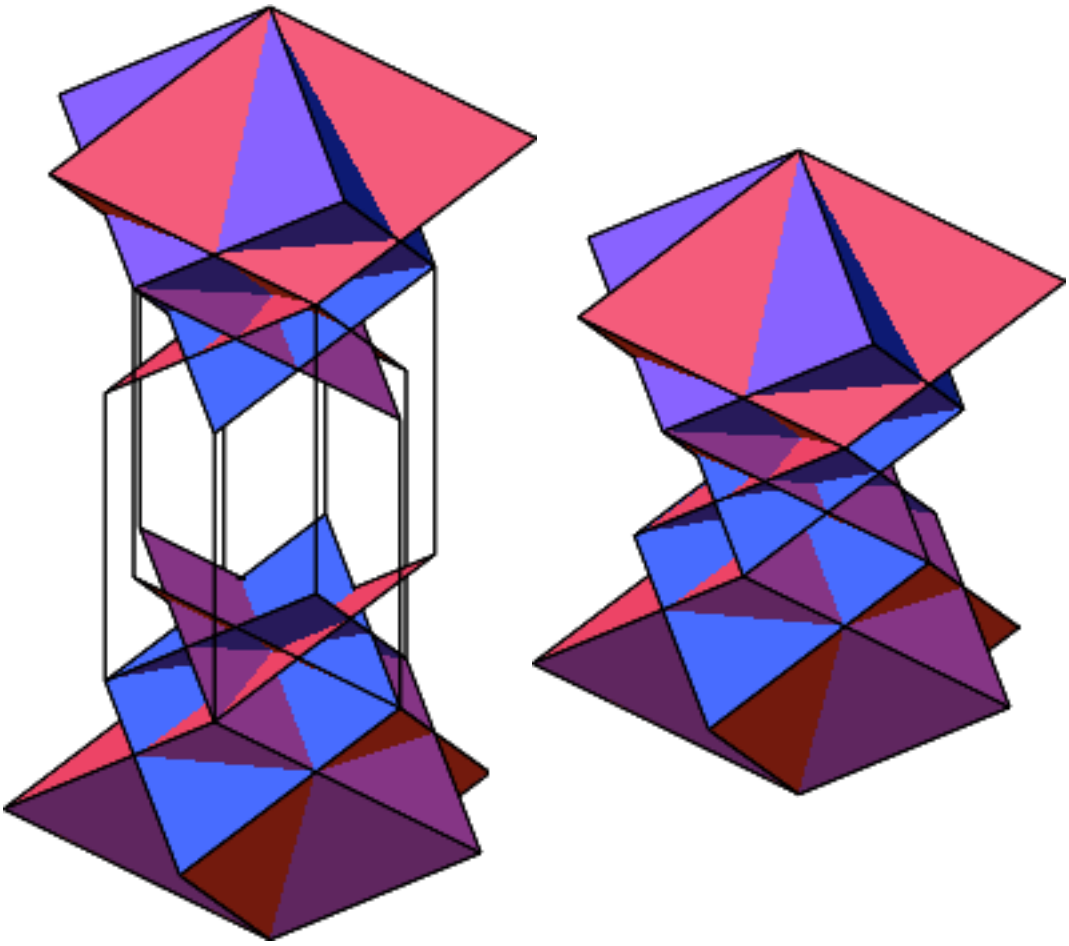
Wir entfernen beim konvexen Rhombentriakontaeder die zehn senkrecht stehenden Rhomben des Äquatorkranzes (Abb. 7a) und schieben die verbleibenden Polkappen zusammen (Abb. 7b). Dadurch entsteht das konvexe Rhombenikosaeder. Es ist von zwanzig kongruenten Rhomben begrenzt.



a) b)

Abb. 7: Konvexes Rhombenikosaeder

Analog können wir mit dem nicht konvexen Rhombentriakontaeder verfahren (Abb. 8). Es entsteht das nicht konvexe Rhombenikosaeder.



a) b)

Abb. 8: Nicht konvexes Rhombenikosaeder

Die Topologie der Ecken und Kanten der beiden Rhombenikosaeder stimmen wiederum überein (Abb. 9). Es gibt nun auch Ecken (lila), in denen vier Kanten zusammenkommen. Beim konvexen Rhombenikosaeder treffen in diesen Ecken drei spitze und ein stumpfer Winkel zusammen. Beim nicht konvexen Rhombenikosaeder ist es umgekehrt.

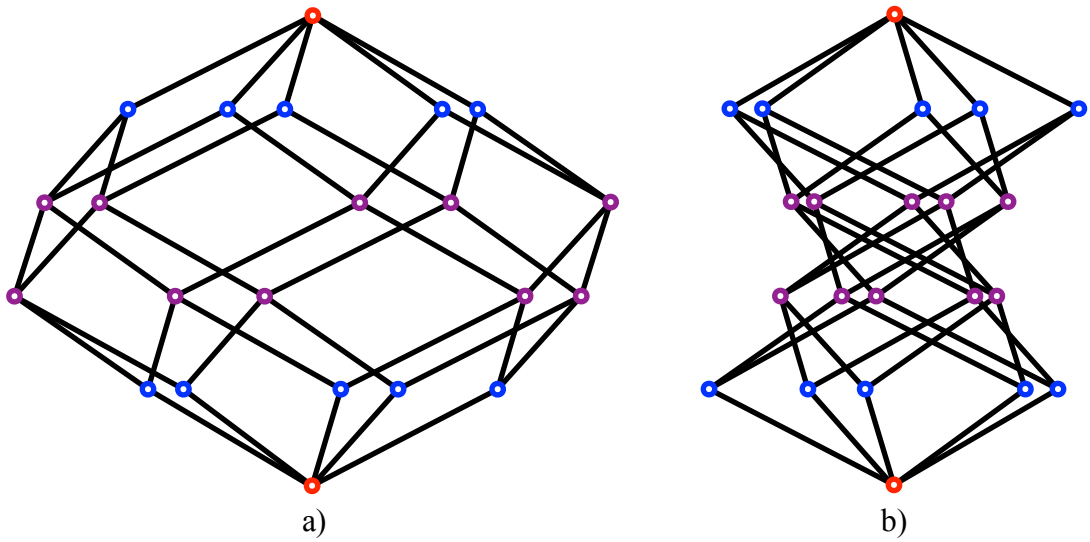


Abb. 9: Gleiche Topologie

Alle Kanten haben gegenüber der horizontalen Standebene denselben Steigungswinkel arctan(½) ≈ 26.565°. Daher sind die Niveauunterschiede der Ecken in der Abbildung 9 äquidistant.

Die beiden Rhombenikosaeder haben dieselben Symmetrien.