Hans Walser, [20151227]

Reuleaux-Zweieck

Idee und Anregung: Renato Pandi

1 Das Reuleaux-Zweieck

Das Reulaux-Zweieck ist ein Kreisbogen-Zweieck mit 60°-Winkeln (Abb. 1).

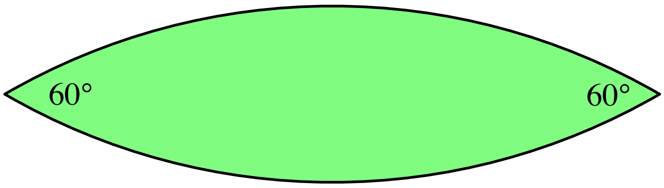

Abb. 1: Reuleaux-Zweieck

Für die folgenden Überlegungen arbeiten wir mit einem Reuleaux-Zweieck der Sehnenlänge $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$.

Über Reuleaux-Zweiecke mit 120°-Winkeln siehe (Reuleaux 1875, S. 120f).

2 Im gleichseitigen Dreieck

Ein Reuleaux-Zweieck der Sehnenlänge $\frac{\sqrt{3}}{2}$ kann auf beliebig viele Arten in ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 gelegt werden. Dabei berührt es immer alle drei Seiten (Abb. 2a).

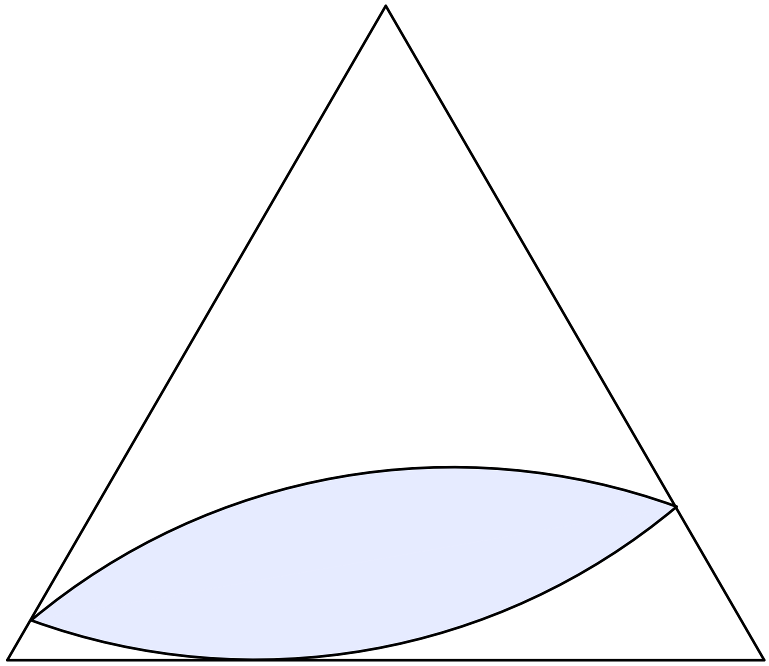

Abb. 2a: Reuleaux-Zweieck im Dreieck

Die Abbildung 2b zeigt mehrere Reuleux-Zweiecke im Dreieck. Die Zweiecke sind untereinander verdreht. Sie werden aber nicht im Dreieck abgerollt.

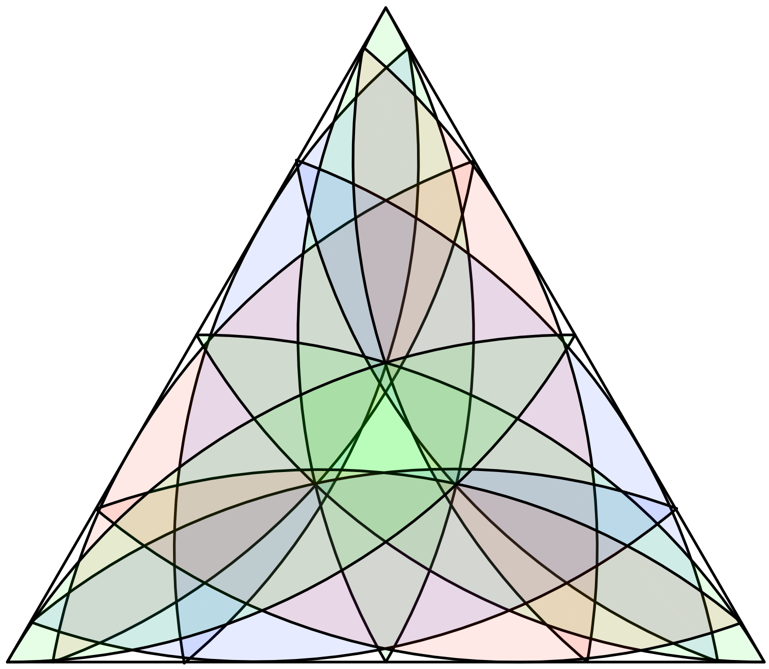

Abb. 2b: Reuleaux-Zweiecke im Dreieck

3 Zwischenbemerkung

Für das Reuleaux-Dreieck gilt ein analoger Sachverhalt, indem es auf beliebig viele Arten in ein Quadrat gelegt werden kann und immer alle vier Quadratseiten berührt.

4 Beweis

Für den Beweis gehen wir umgekehrt vor: Wir lassen ein Zweieck fest und umschreiben verschiedene kongruente gleichseitige Dreiecke.

Im Folgenden das schrittweise Vorgehen.

Wir beginnen mit einem Kreisbogen BC mit dem Zentrum A, dem Zentriwinkel 60° und dem Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dieser Bogen entspricht einem der beiden Außenbogen des Reuleaux-Zweieckes.

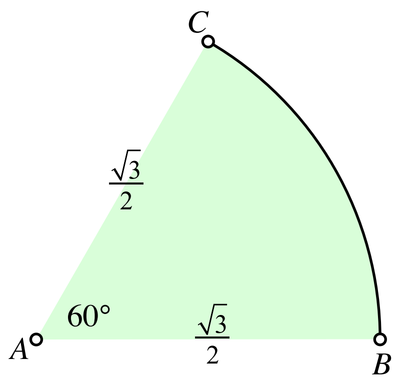

Abb. 3: Start mit einem Kreisbogen

Wir zeichnen den Kreis durch die drei Punkte A, B und C (Abb. 4). Dieser Kreis ist Ortsbogen für Peripheriewinkel von 60° über jeder der drei Strecken AB, BC und CA.

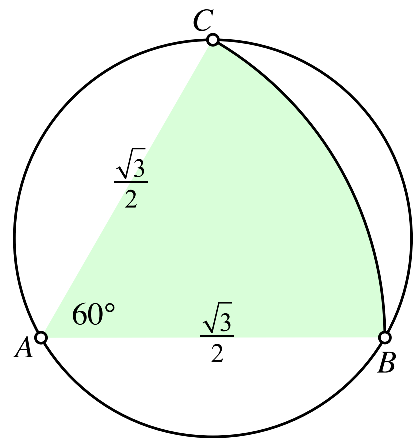

Abb. 4: Ortsbogen für 60°

Auf dem Ortsbogen wählen wir einen Punkt D gemäß Abbildung 5.

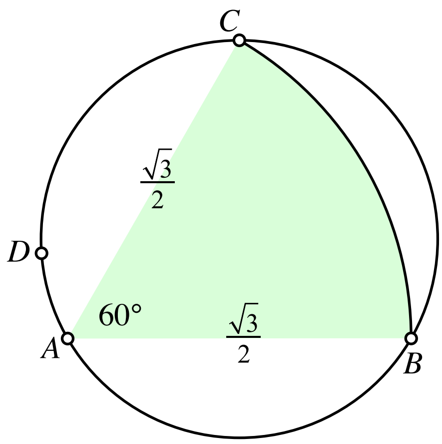

Abb. 5: Punkt auf dem Ortsbogen

Wegen der Ortsbogeneigenschaft ist:

$$\sphericalangle ADB = 60° \tag{1}$$

Und ebenso:

$$\sphericalangle BDC = 60° \tag{2}$$

Wegen (2) können wir ein gleichseitiges Dreieck DEF der Seitenlänge 1 mit einer Seite durch B und einer Seite durch C einpassen (Abb. 6).

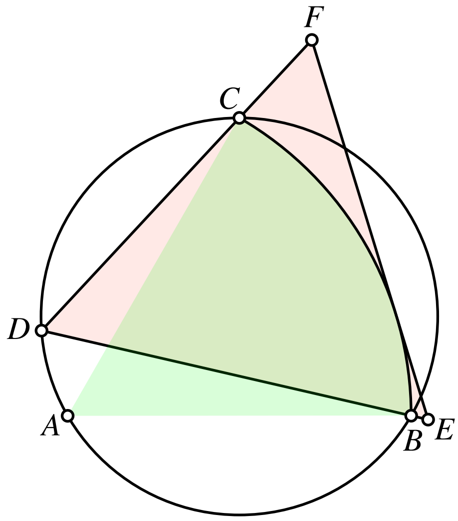

Abb. 6: Geleichseitiges Dreieck

Im gleichseitigen Dreieck DEF ist:

$$\sphericalangle FED = 60° \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) sind die Geraden AD und EF parallel. Die Breite des Parallelenstreifens ist die Höhe des Dreiecks DEF, also $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Das heißt, dass der Lotfußpunkt G von A auf die Gerade EF auch auf dem Bogen BC liegt (Abb. 7).

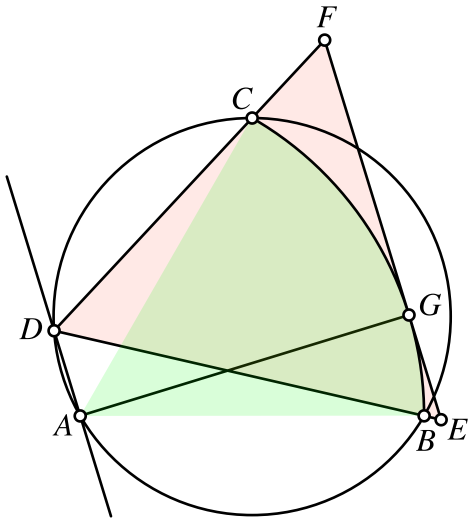

Abb. 7: Streifenbreite

Somit berührt das zum Bogen BC gehörende Reuleaux-Zweieck alle drei Seiten des gleichseitigen Dreiecks. Dies war zu zeigen.

5 Mittelpunkt und Viertelpunkt

Die Abbildung 8 zeigt die Bahnkurve des Mittelpunktes eines Reuleaux-Zweieckes beim Abdrehen im Dreieck.

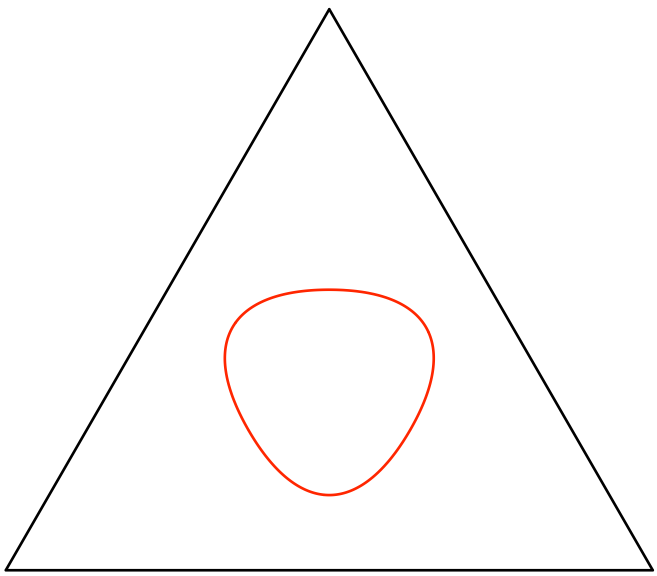

Abb. 8: Bahnkurve des Mittelpunktes

Die Abbildung 9 zeigt die Bahnkurve der beiden Viertelpunkte auf der Sehne des Reuleaux-Zweieckes.

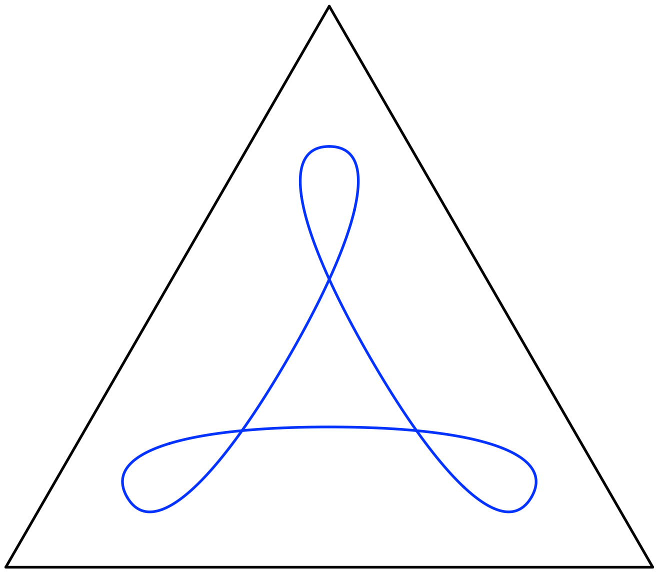

Abb. 9: Viertelpunkt

6 Ausblick?

Die geneigte Leserin ist eingeladen zu prüfen, ob das für das Reuleaux-Viereck im regelmäßigen Fünfeck auch hinhaut.

Literatur

Reuleaux, F. (1875): Lehrbuch der Kinematik. Braunschweig: Vieweg. https://ia700409.us.archive.org/29/items/lehrbuchderkine01reulgoog/lehrbuchderkine01reulgoog.pdf