Hans Walser, [20201011]

Anregung: Thomas Jahre, Aufgabe 651

Regelmäßige Vielecke

1 Aufgabenstellung

(redigierte Fassung)

Zwei Seiten des gelben Einheitsquadrates werden nach rechts beziehungsweise nach oben durch Ansetzen einer Strecke der Länge p verlängert (Abbildung 1a für $p = 1$). Dann ergänzen wir zu einem neuen Quadrat. Der Flächeninhalt des neuen Quadrats ist m mal so groß wie der Flächeninhalt des gelben Einheitsquadrates.

Berechne die natürliche Zahl m.

Man kann eine entsprechende Konstruktion auch mit einem anderen regelmäßigen n-Eck beginnen und die Verhältnisse der Flächeninhalte ermitteln. Außer $n = 4$ gibt es nur zwei Werte für n, so dass die passende Zahl m eine natürliche Zahl ist. Welche n-Ecke sind das und wie groß ist das passende m?

2 Quadrat

Die Abbildung 1a zeigt die Situation für das Quadrat und $p = 1$.

Es ist $m = 5$ (Zerlegungsbeweis Abb. 1b und 1c).

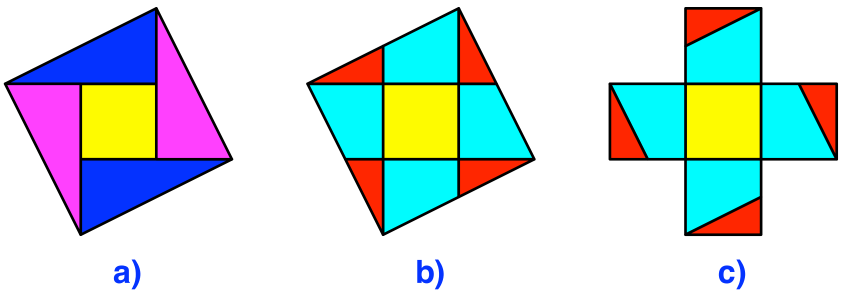


Abb. 1: Verfünffachung des Quadrates

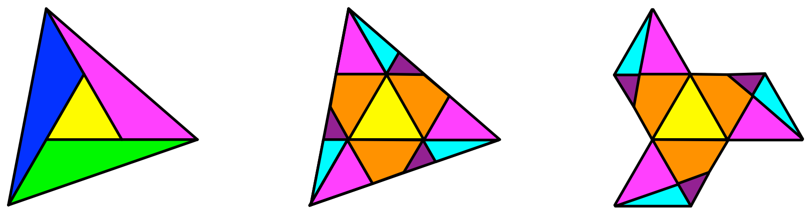
Es gibt für jede natürliche Zahl p eine Lösung.

Es ist dann $m = (p+1)^2 + p^2 = 2p^2 + 2p + 1$. Beweis mit dem Satz des Pythagoras.

3 Gleichseitiges Dreieck

Die Abbildung 2a zeigt die Situation für das gleichseitige Dreieck und $p = 1$.

Es ist $m = 7$ (Zerlegungsbeweis Abb. 2b und 2c).



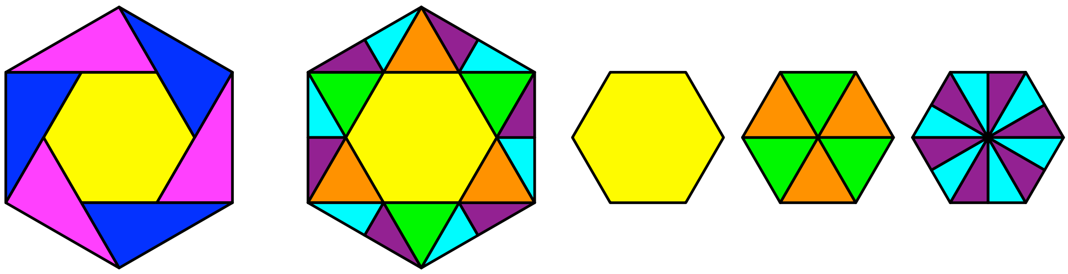
a) b) c)

Abb. 2: Versiebenfachung des Dreieckes

Es gibt für jede natürliche Zahl p eine Lösung.
Es ist dann $m = (p+1)^2 + p^2 + p(p+1) = 3p^2 + 3p + 1$. Beweis mit dem Kosinus-Satz.

4 Regelmäßiges Sechseck

Die Abbildung 3a zeigt die Situation für das regelmäßige Sechseck und $p = 1$.
Es ist $m = 3$ (Zerlegungsbeweis Abb. 3b bis 3e).



a) b) c) d) e)

Abb. 3: Verdreifachung des Sechseckes

Es gibt für jede natürliche Zahl p eine Lösung.
Es ist dann $m = (p+1)^2 + p^2 - p(p+1) = p^2 + p + 1$. Beweis mit dem Kosinus-Satz.

5 Andere Vielecke?

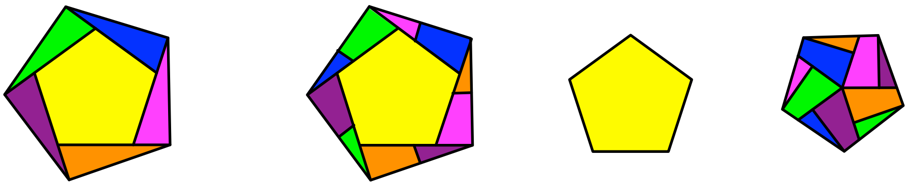
Wenn wir verlangen, dass p eine natürliche Zahl sein soll, gibt es nur die obigen Lösungen. Das liegt daran, dass $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ nur für $n = 2, 3, 4, 6$ eine rationale Zahl ist. Das ist ein nicht leicht einzusehender zahlentheoretischer Sachverhalt.

Insbesondere für $n = 5$ ist: $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.3090$. Dies ist eine irrationale Zahl.

Wenn p eine reelle Zahl sein darf (aber m nach wie eine natürliche Zahl), gibt es für jedes n-Eck beliebig viele Lösungen.
Zum Beispiel können wir mit

$$p = -\tfrac{1}{2} - \frac{\sqrt{350-90\sqrt{5}}}{10\left(-\sqrt{5}+1\right)} \approx 0.4867 \tag{1}$$

das regelmäßige Fünfeck verdoppeln (Abb. 4). Beim Zerlegungsbeweis ist zu beachten dass die kleinen Dreiecke in den Abbildungen 4b und 4d gegengleich orientiert sind.



a) b) c) d)

Abb. 4: Verdoppelung des Fünfeckes

6 Allgemein

Wir können die Zahl m beliebig wählen. Zu gegebenem n finden wir p als Lösung der quadratischen Gleichung:

$$m = (p+1)^2 + p^2 - 2p(p+1)\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right) \tag{2}$$

Beweis mit dem Kosinus-Satz.