Hans Walser, [20200619]

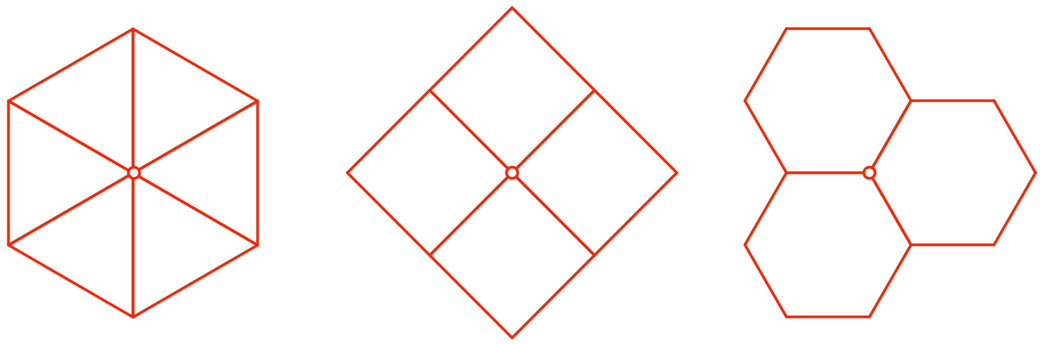
Regelmäßige Vielecke

1 Worum geht es?

Eine Schließungsfigur mit regelmäßigen Vielecken.

2 Einführung

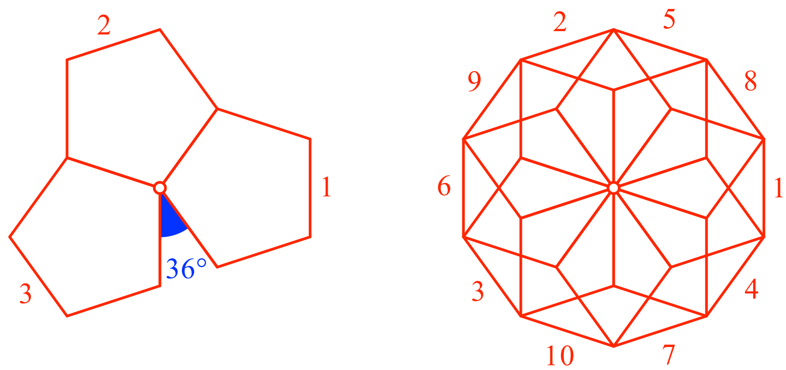
Wir können sechs regelmäßige Dreiecke (Abb. 1a), vier Quadrate (Abb. 1b) oder drei regelmäßige Sechsecke (Abb. 1c) an einer Ecke zusammenfügen, so dass es nach einem Umlauf aufgeht.



a) b) c)

Abb. 1: Aneinanderfügen von regelmäßigen Vielecken

Bei regelmäßigen Fünfecken geht es nicht mehr so schlank.



a) b)

Abb. 2: Regelmäßige Fünfecke

Nach drei Fünfecken bleibt eine Lücke von 36° übrig (Abb. 2a), die sich nicht mehr mit einem weiteren Fünfeck schließen lässt. Wenn wir jedoch unbeirrt weiterfahren, kommen wir nach insgesamt zehn Fünfecken und drei Umläufen zurück (Abb. 2b). Wir haben also eine Schließungsfigur.

Tatsächlich ist es so, dass Dreieck, Quadrat und Sechseck (Abb. 1) die einzigen konvexen Vielecke sind, die sich nach einem Umlauf schließen.

3 Beispiele

Im Folgenden systematisch Beispiele. Es sind jeweils die Eckenzahl $n \geq 3$ des regelmäßigen Vieleckes, die Anzahl a der benötigten Vielecke und die Umlaufszahl u angegeben.

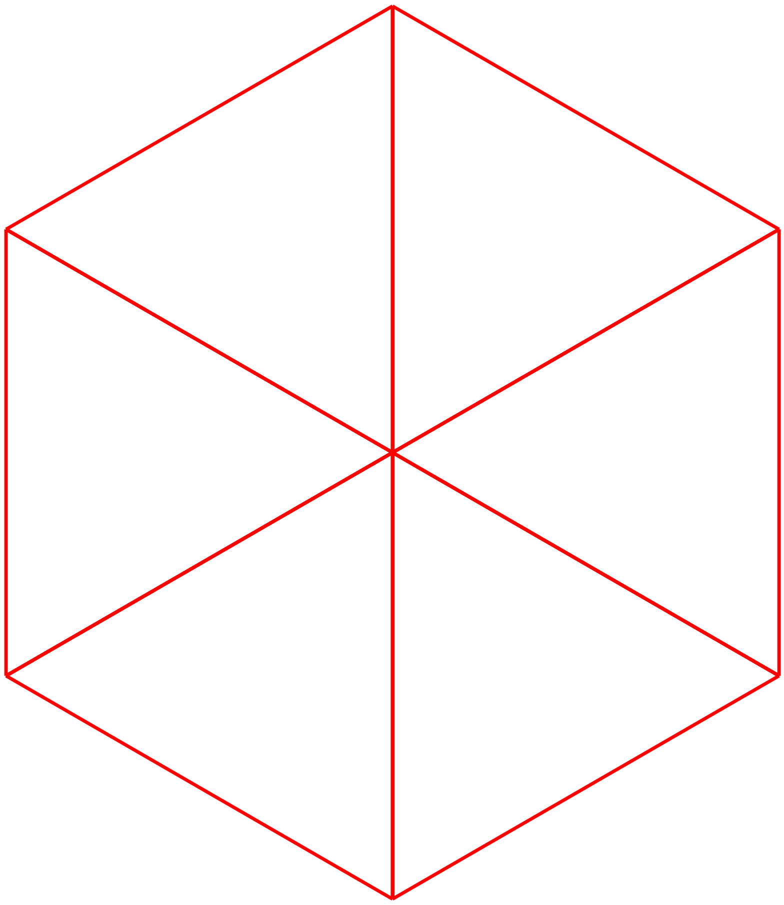


Abb. 3.3: Eckenzahl = 3, Anzahl = 6, Umlaufszahl = 1

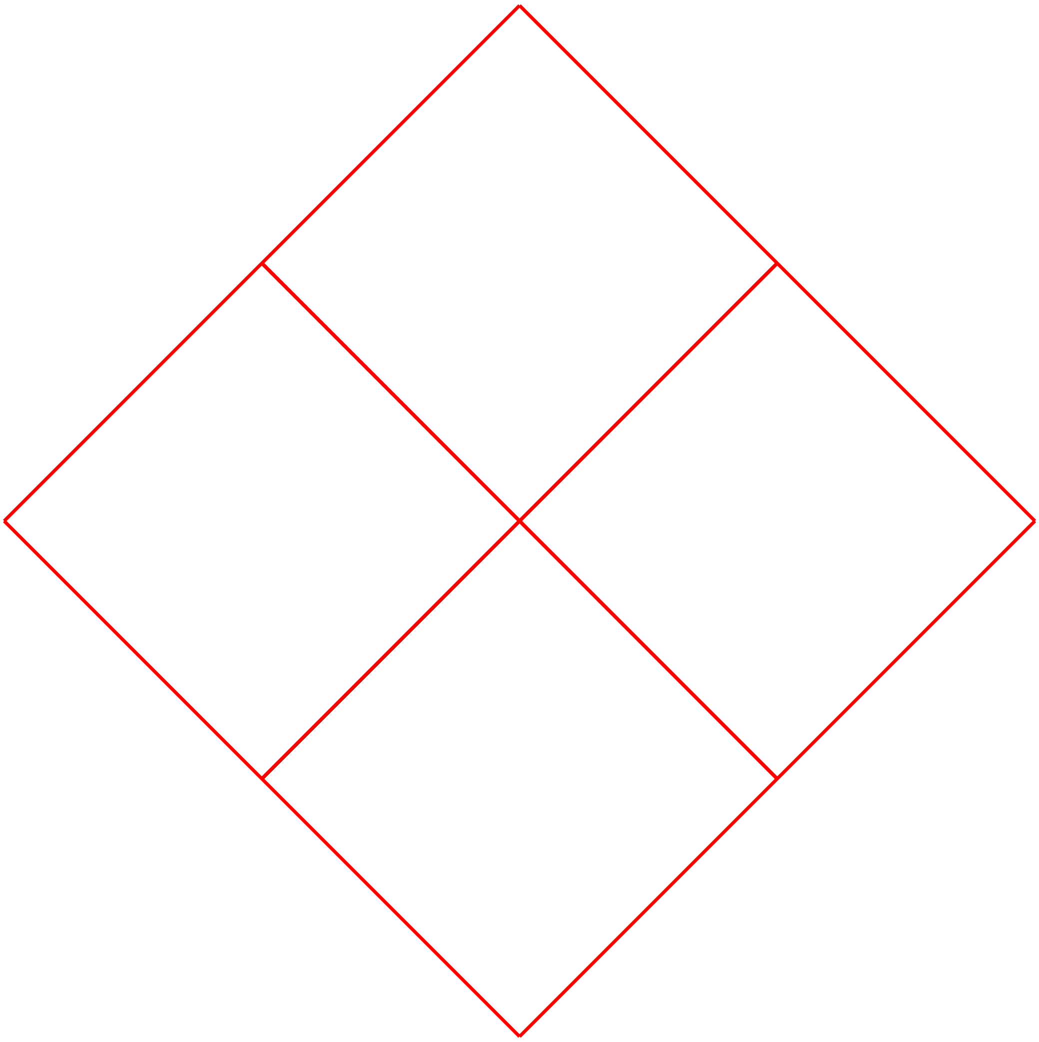


Abb. 3.4: Eckenzahl = 4, Anzahl = 4, Umlaufszahl = 1

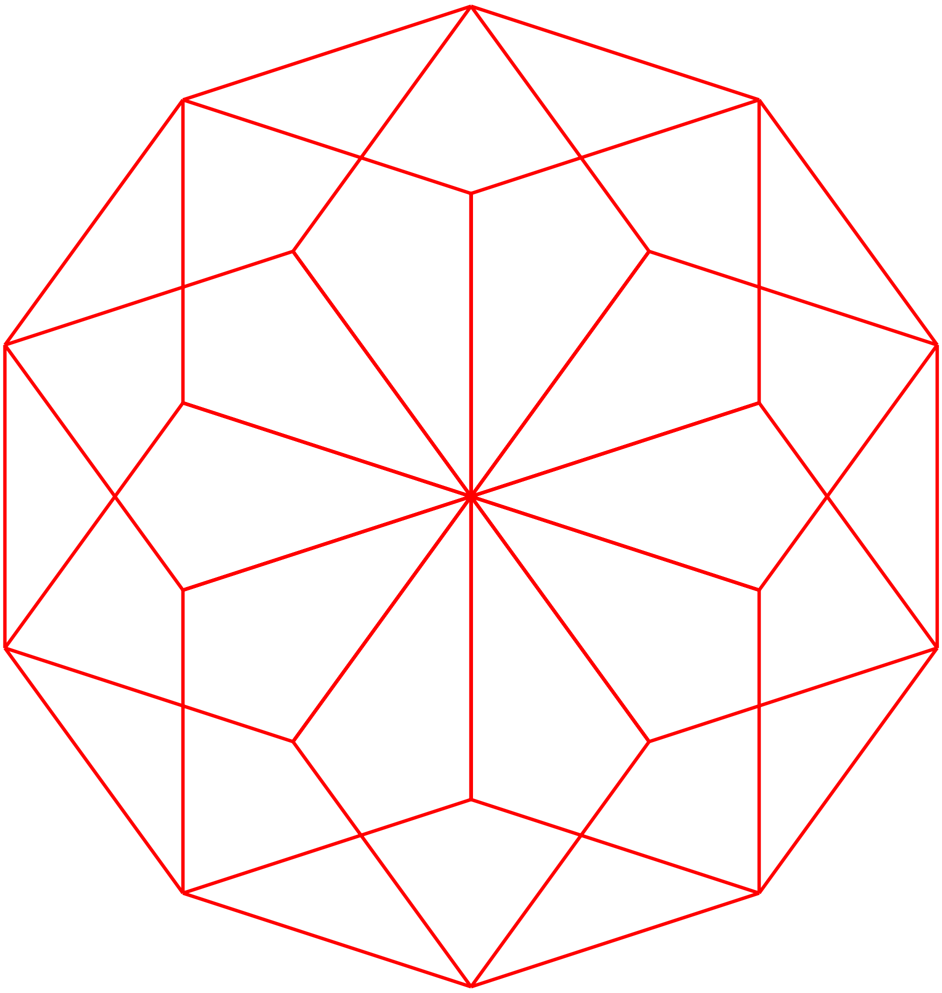


Abb. 3.5: Eckenzahl = 5, Anzahl = 10, Umlaufszahl = 3

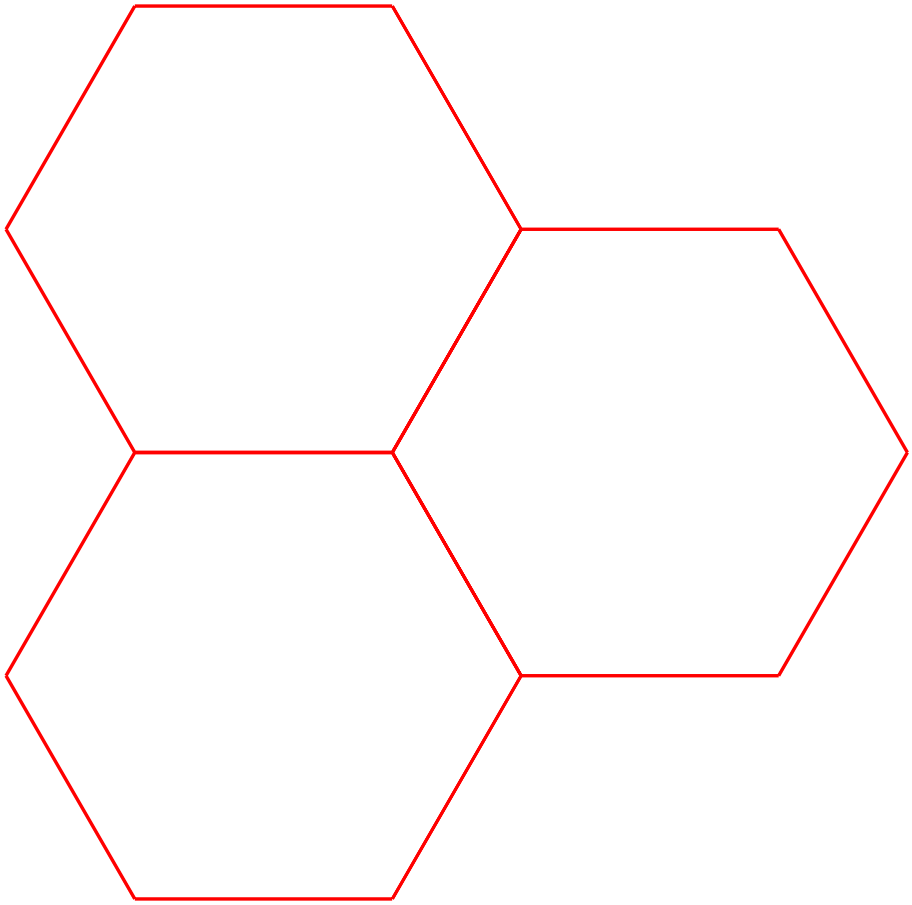


Abb. 3.6: Eckenzahl = 6, Anzahl = 3, Umlaufszahl = 1

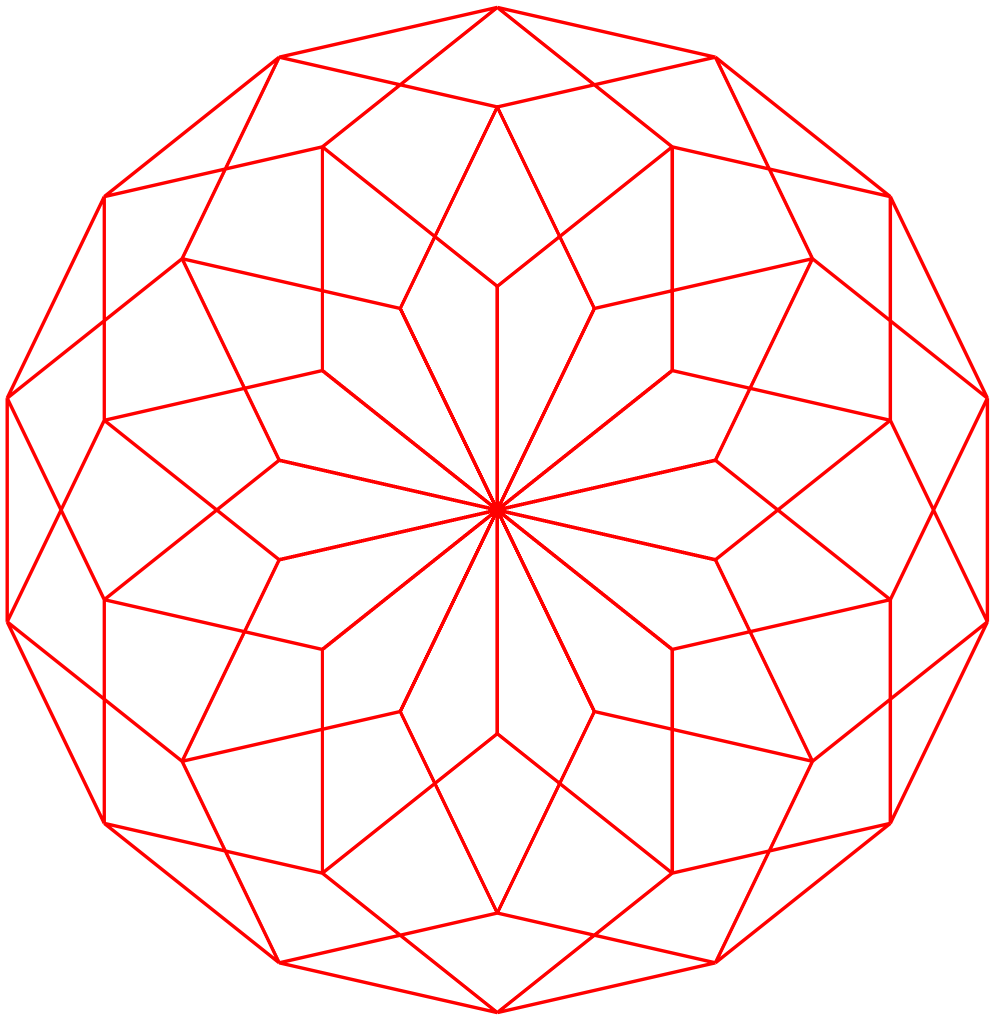


Abb. 3.7: Eckenzahl = 7, Anzahl = 14, Umlaufszahl = 5

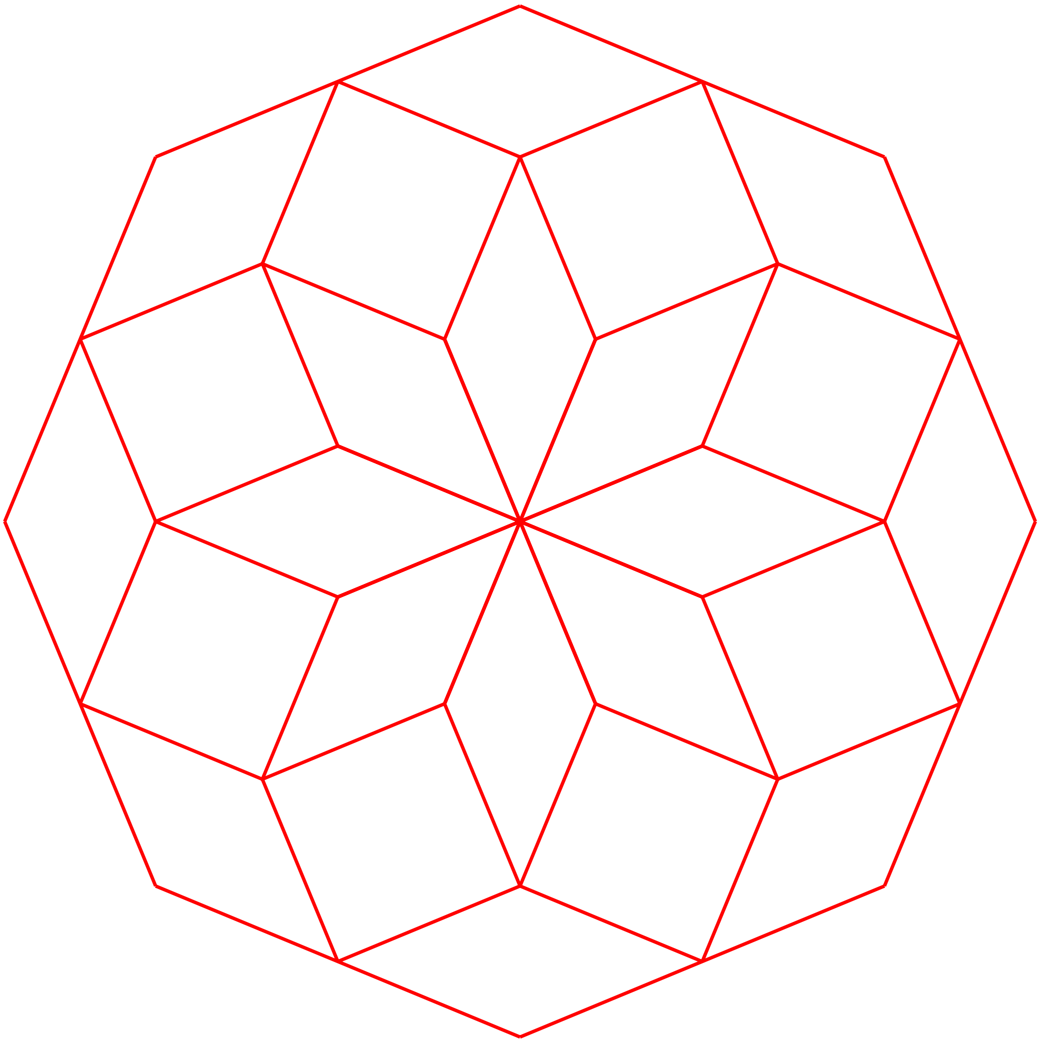


Abb. 3.8: Eckenzahl = 8, Anzahl = 8, Umlaufszahl = 3

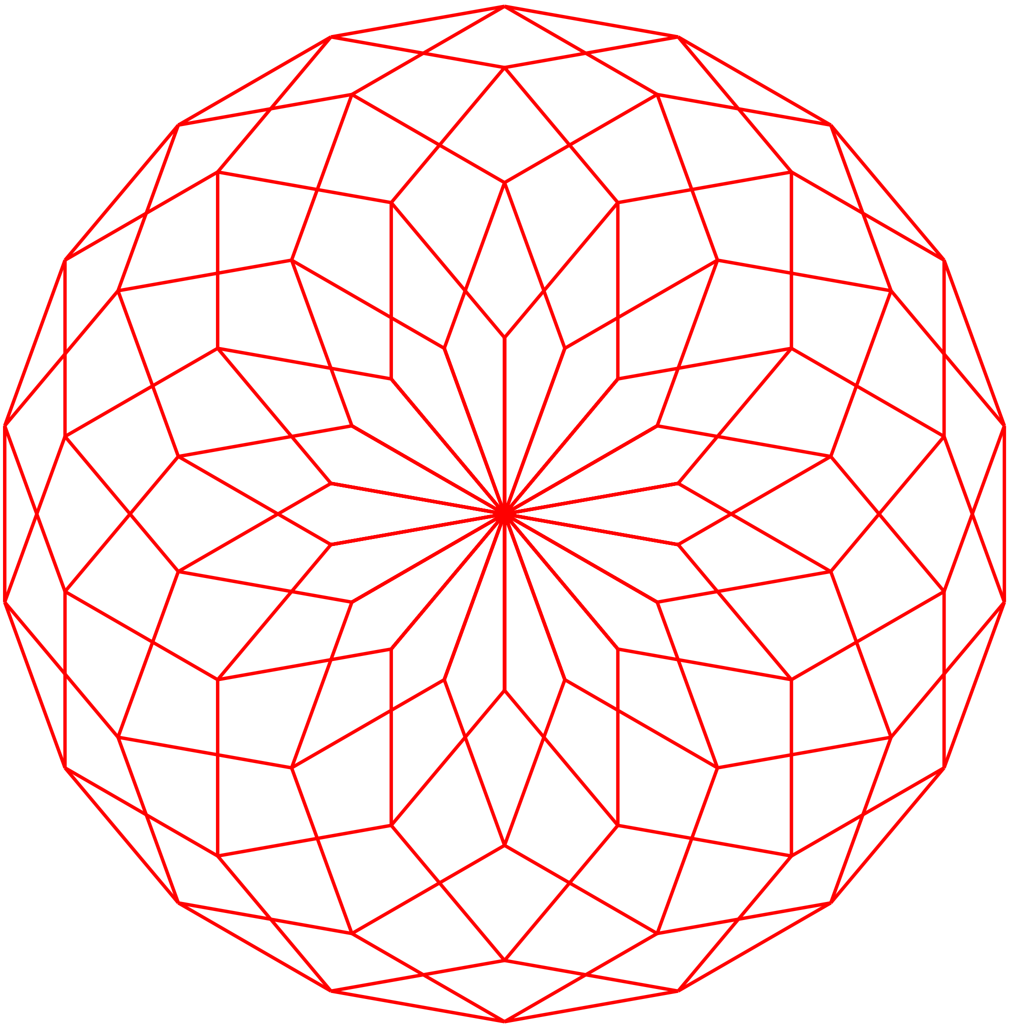


Abb. 3.9: Eckenzahl = 9, Anzahl = 18, Umlaufszahl = 7

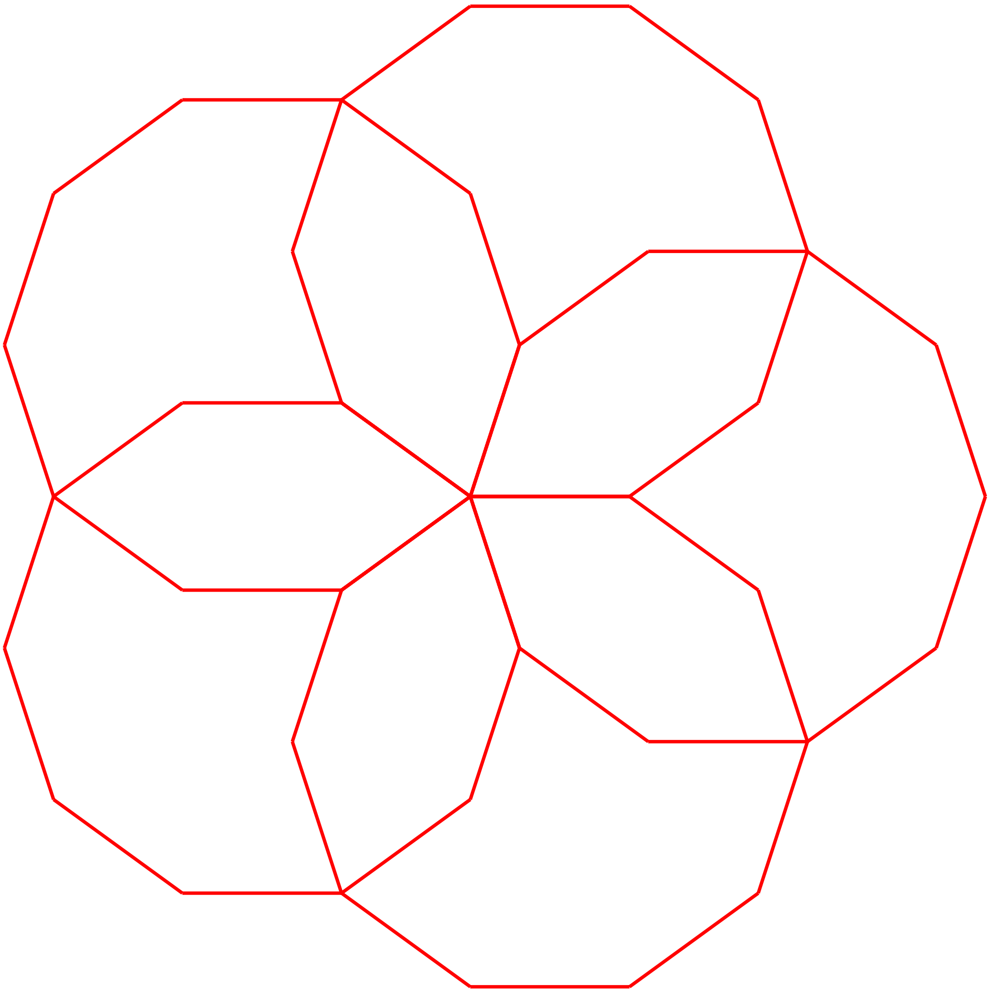


Abb. 3.10: Eckenzahl = 10, Anzahl = 5, Umlaufszahl = 2

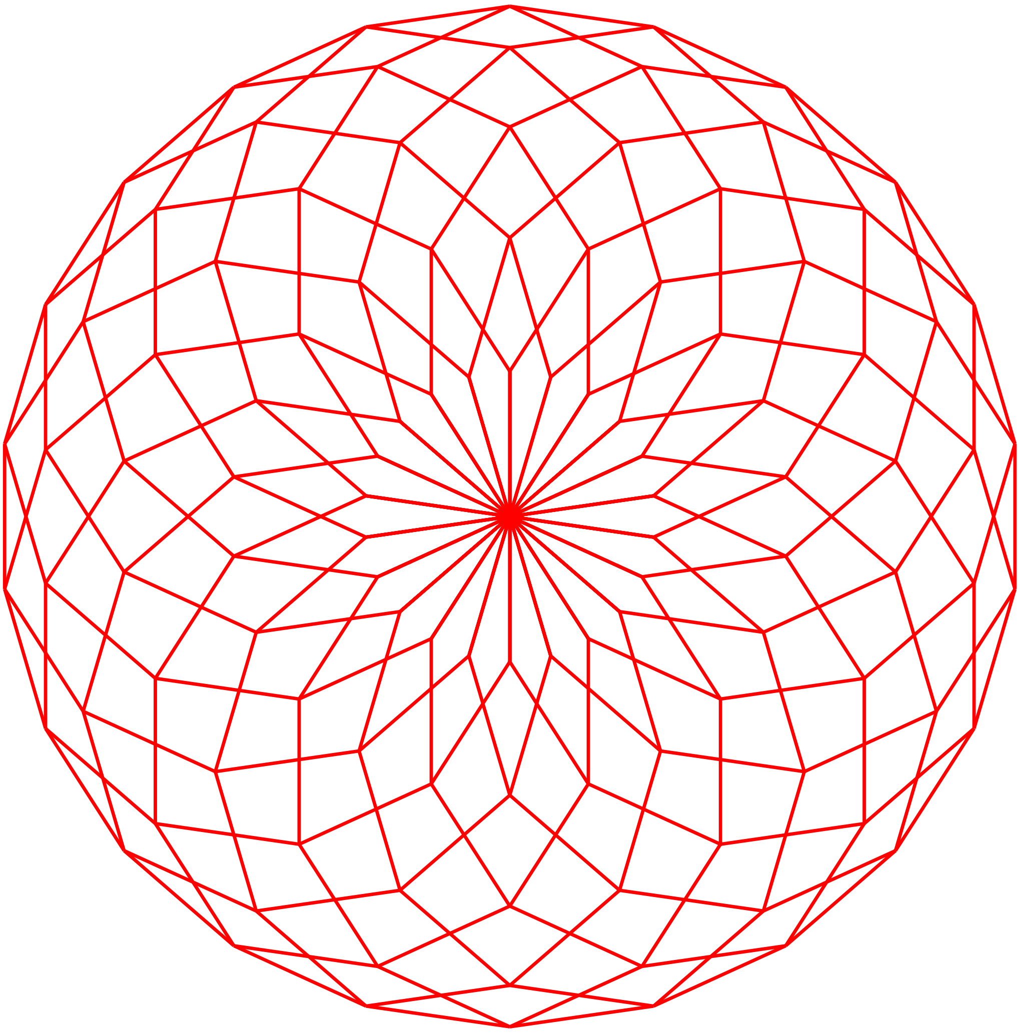


Abb. 3.11: Eckenzahl = 11, Anzahl = 22, Umlaufszahl = 9

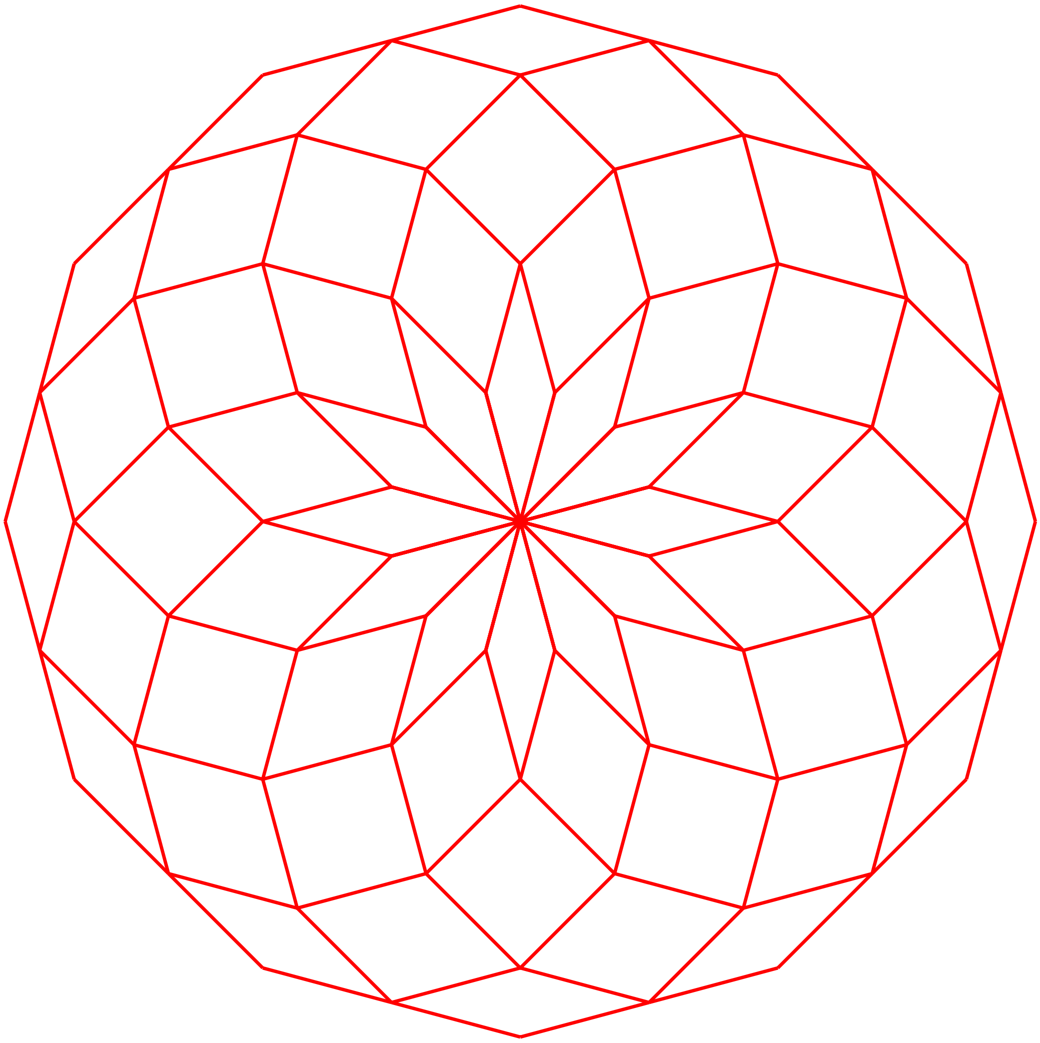


Abb. 3.12: Eckenzahl = 12, Anzahl = 12, Umlaufszahl = 5

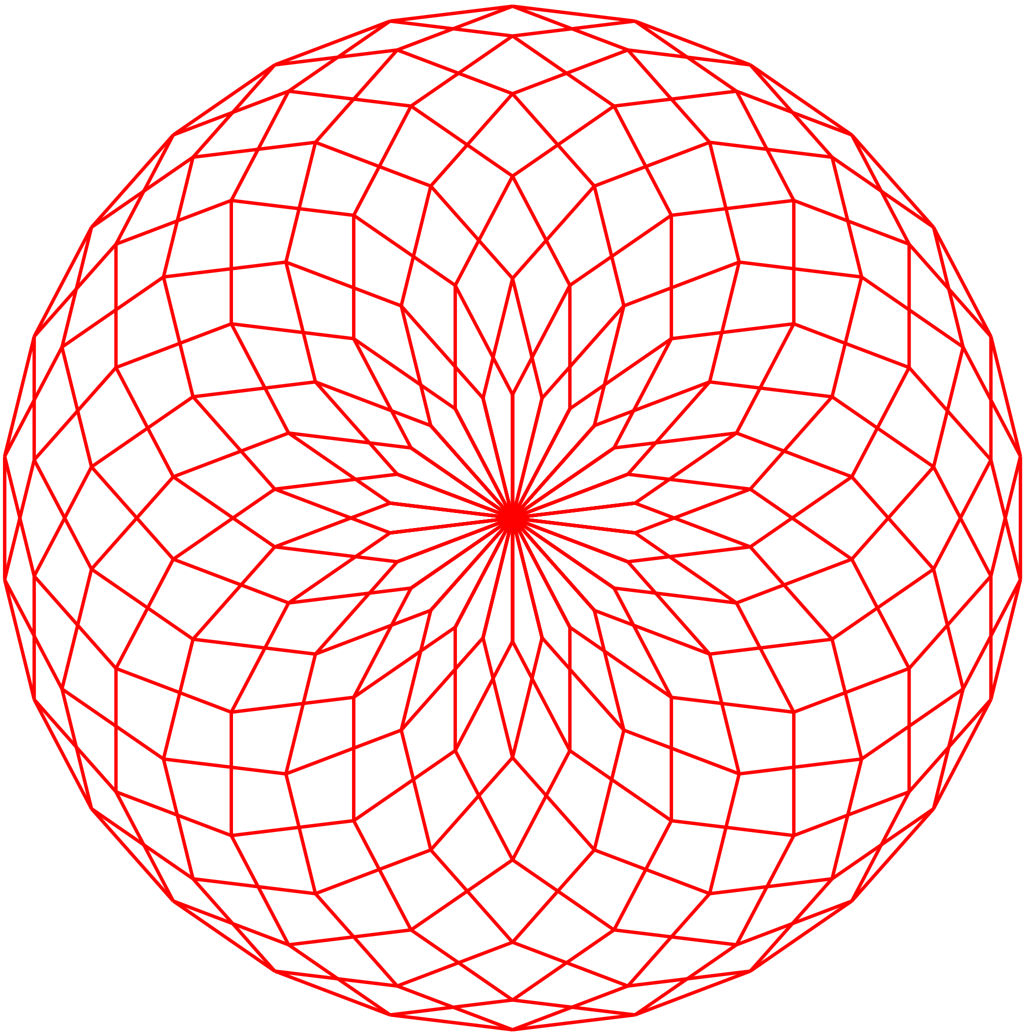


Abb. 3.13: Eckenzahl = 13, Anzahl = 26, Umlaufszahl = 11

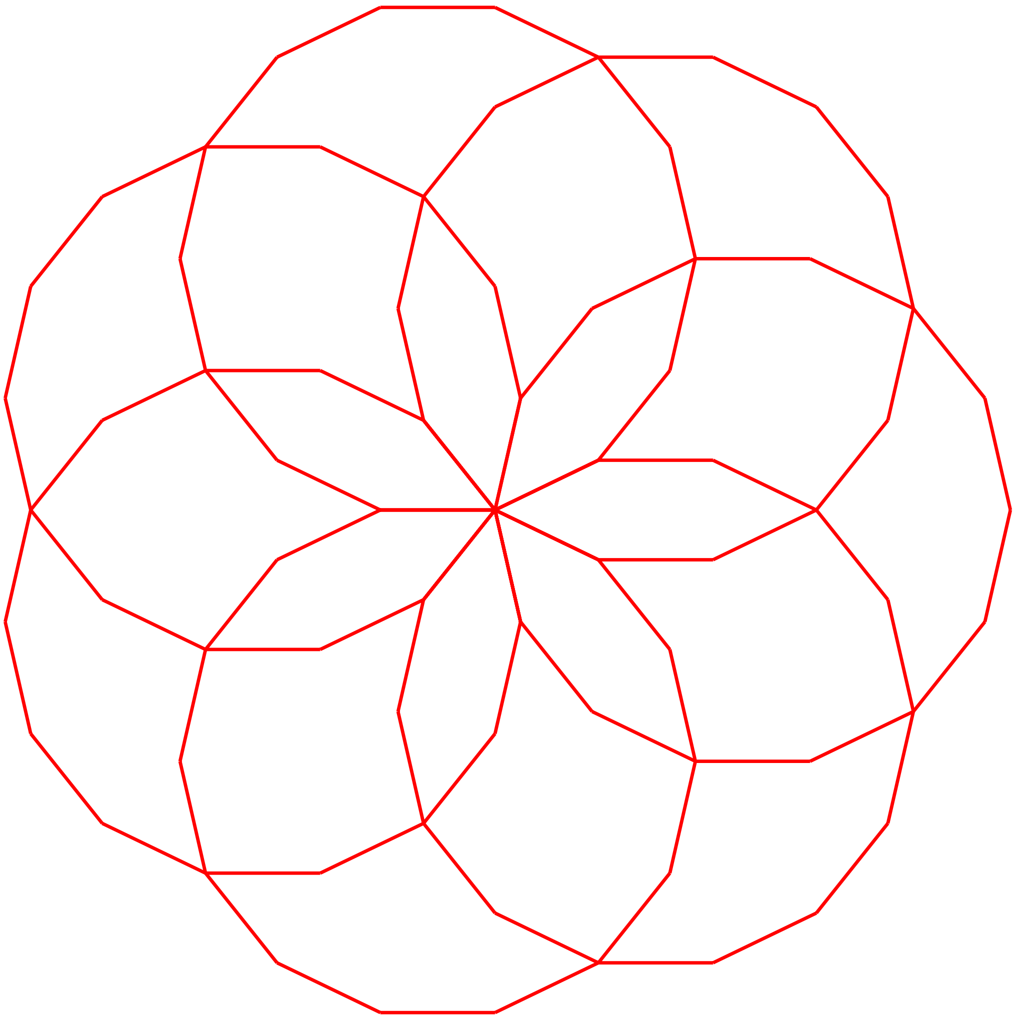


Abb. 3.14: Eckenzahl = 14, Anzahl = 7, Umlaufszahl = 3

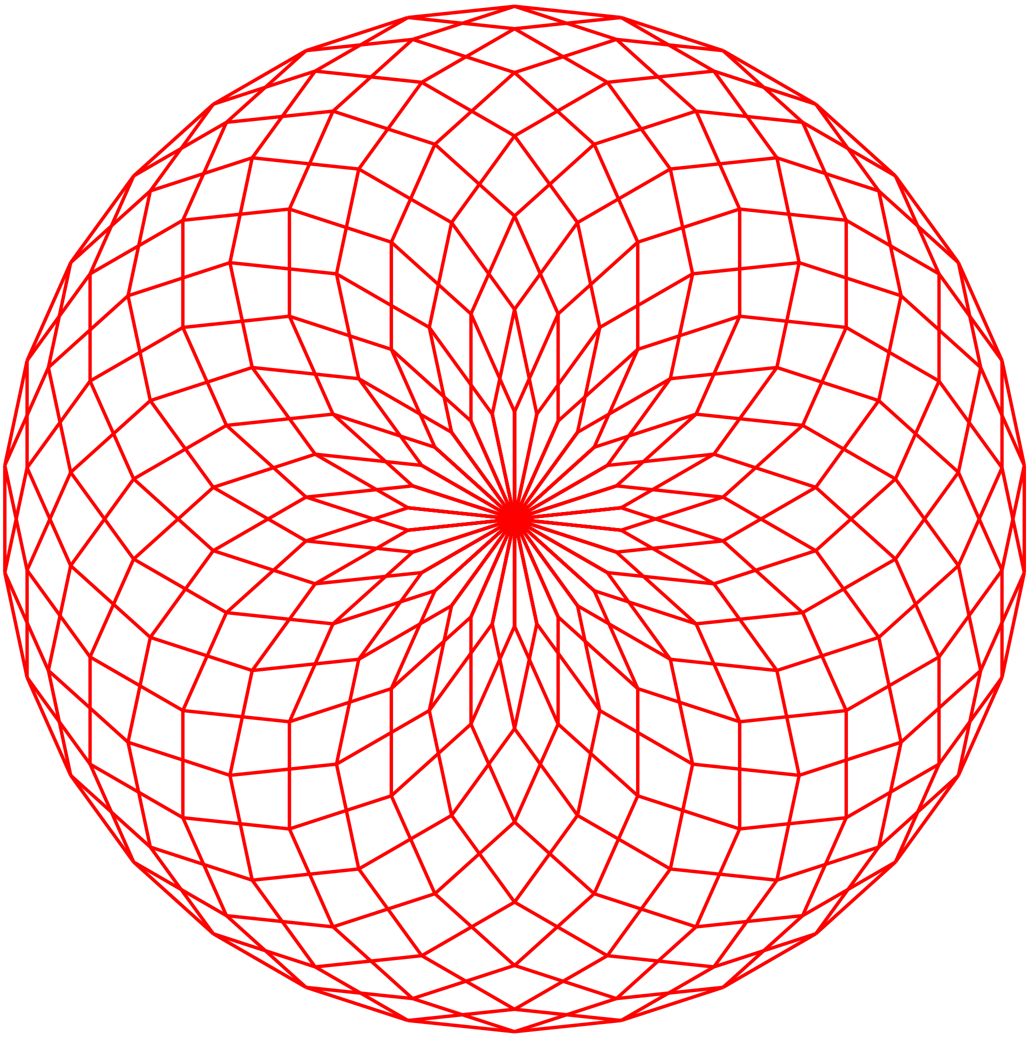


Abb. 3.15: Eckenzahl = 15, Anzahl = 30, Umlaufszahl = 13

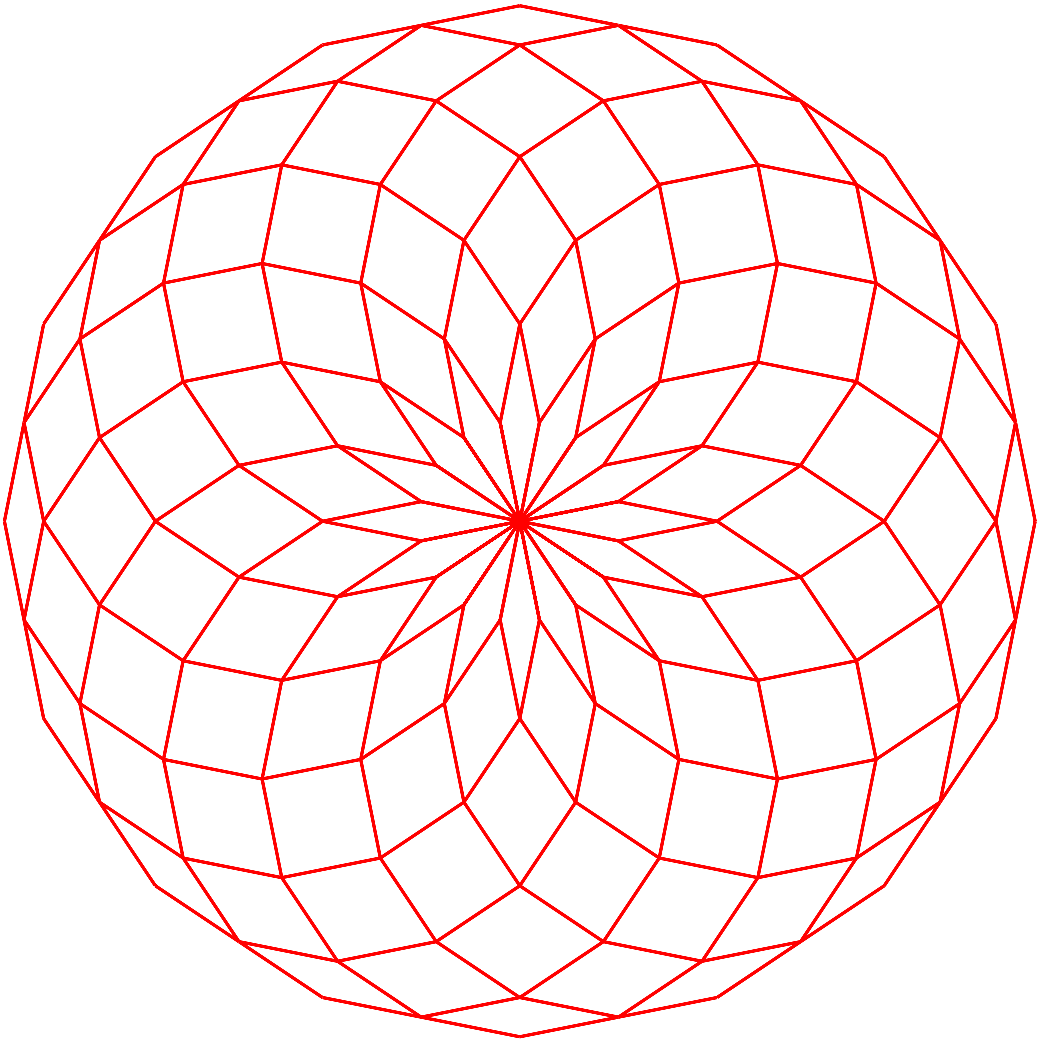


Abb. 3.16: Eckenzahl = 16, Anzahl = 16, Umlaufszahl = 7

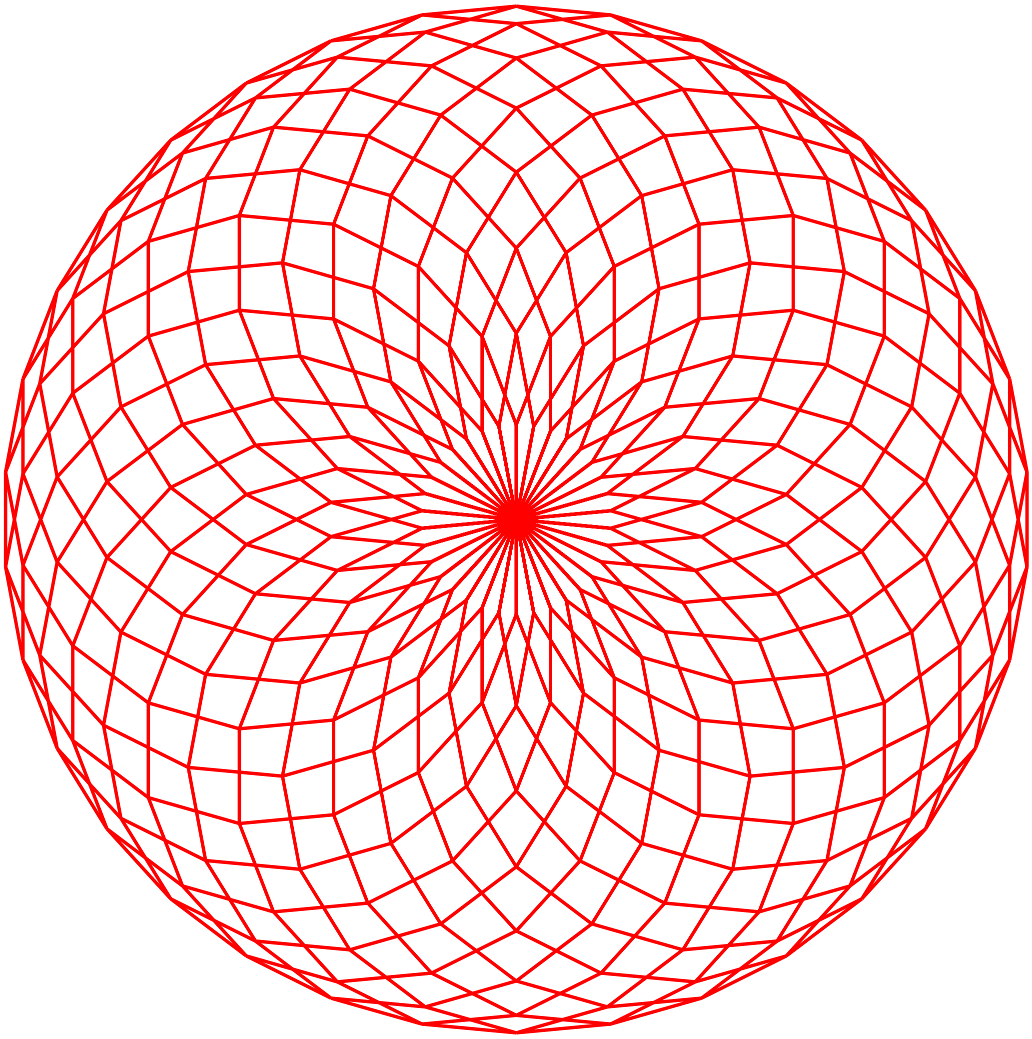


Abb. 3.17: Eckenzahl = 17, Anzahl = 34, Umlaufszahl = 15

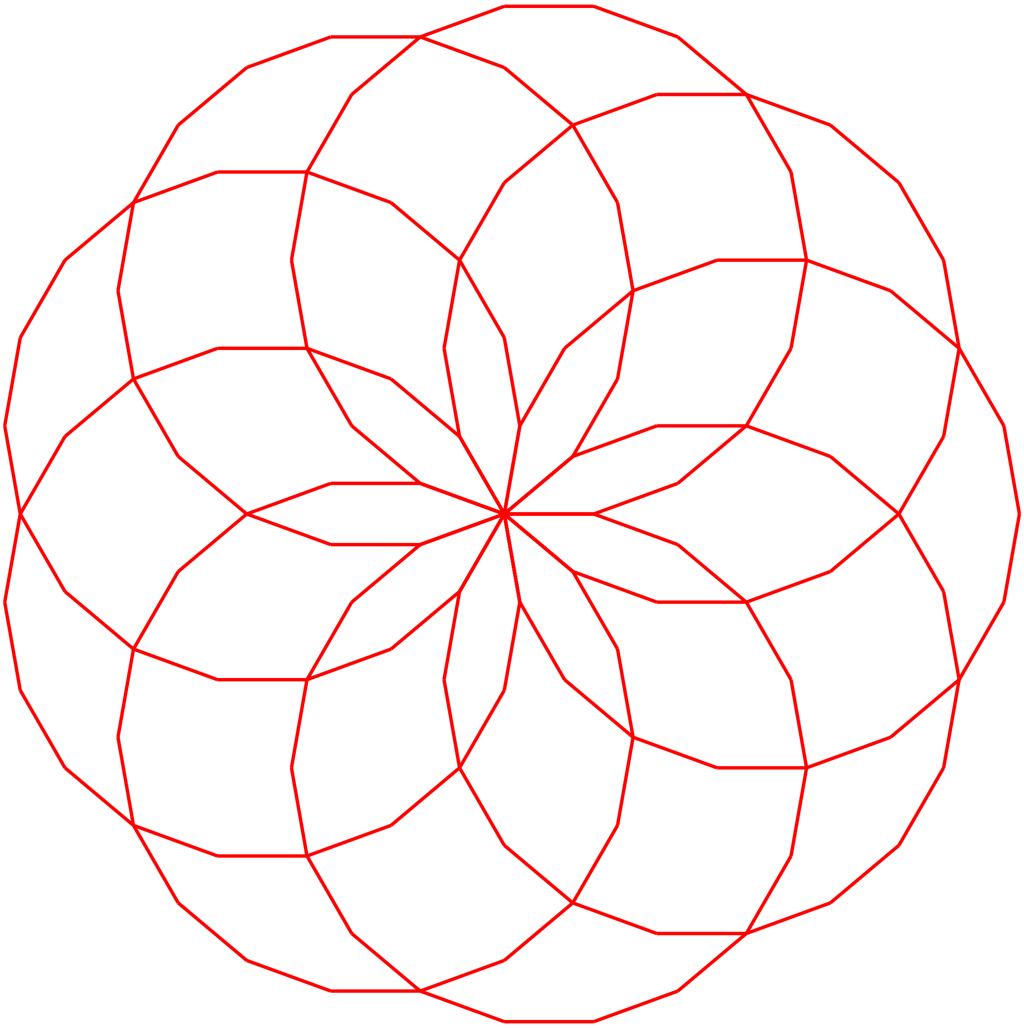


Abb. 3.18: Eckenzahl = 18, Anzahl = 9, Umlaufszahl = 4

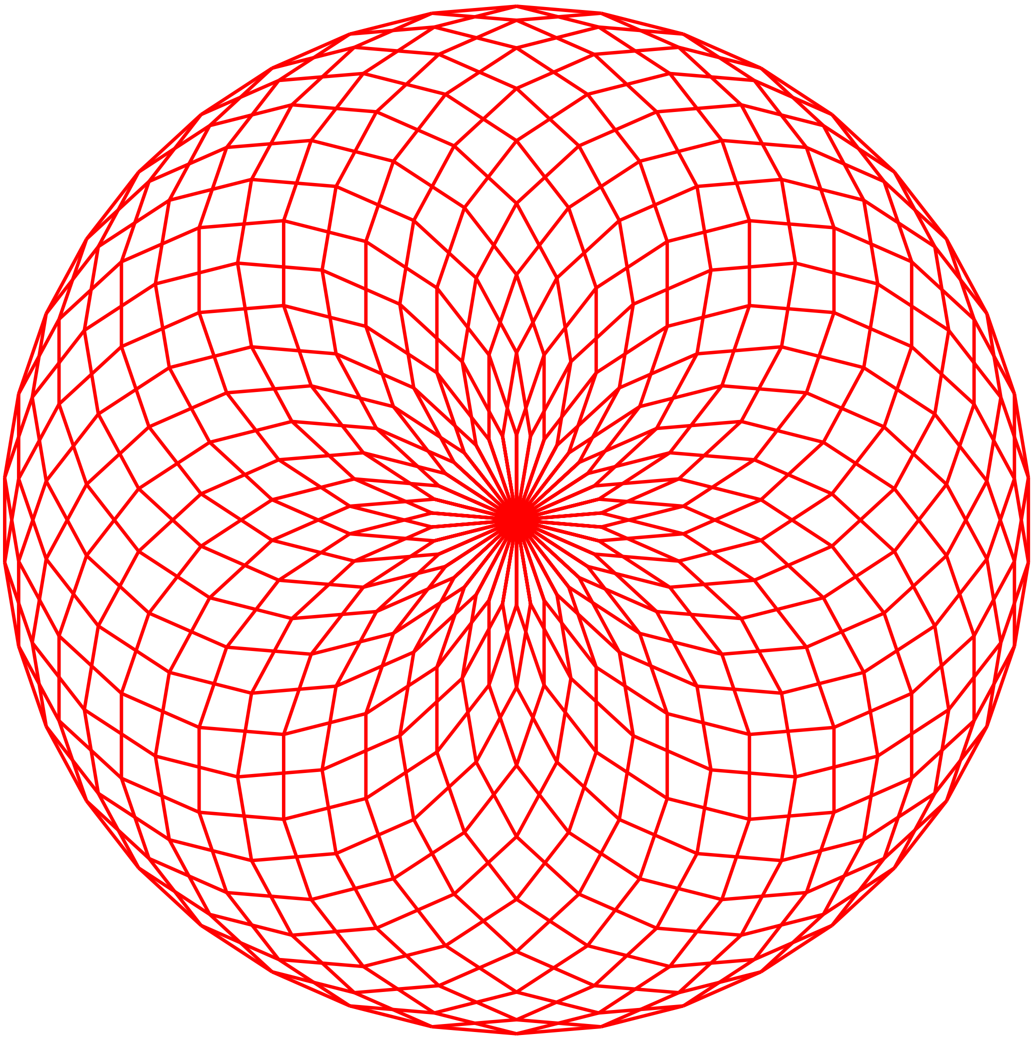


Abb. 3.19: Eckenzahl = 19, Anzahl = 38, Umlaufszahl = 17

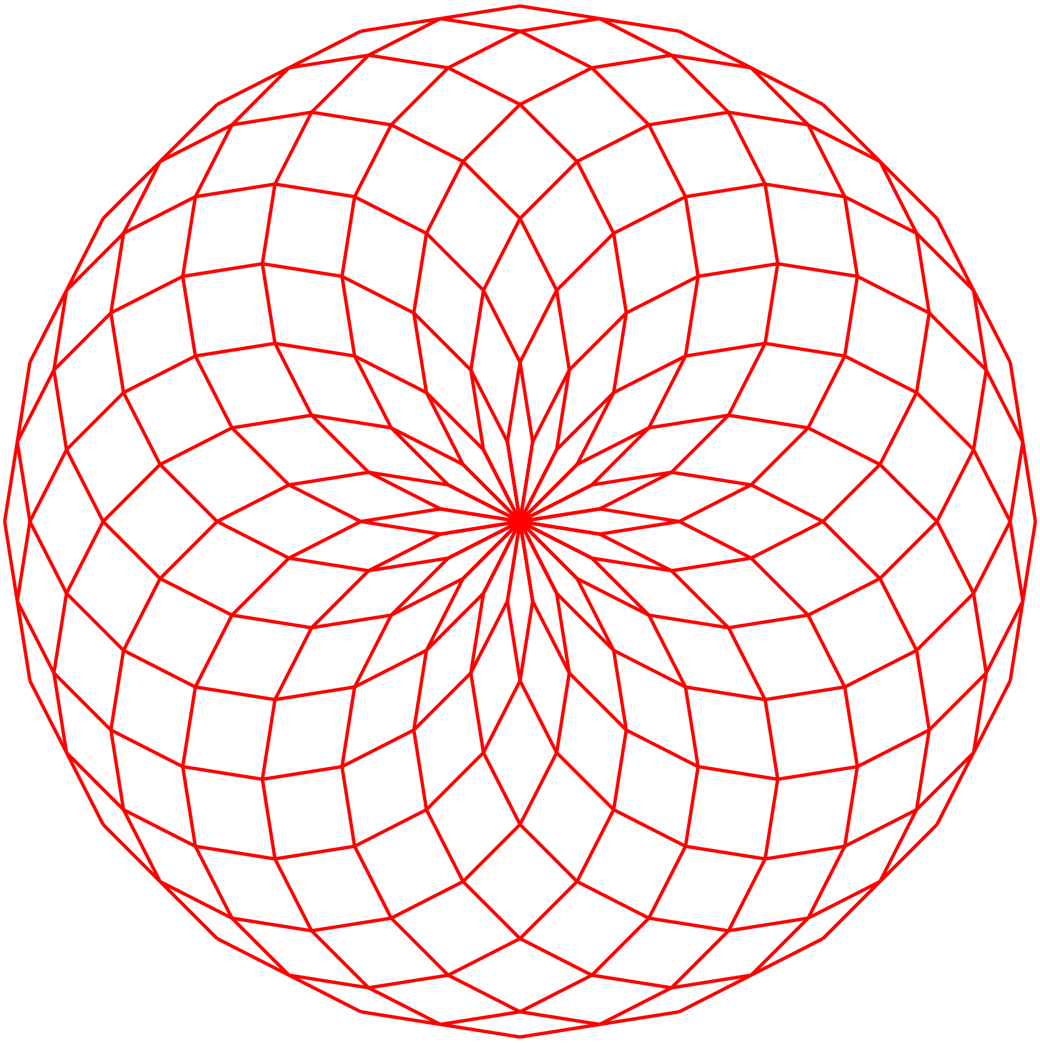


Abb. 3.20: Eckenzahl = 20, Anzahl = 20, Umlaufszahl = 9

4 Anzahl und Umlaufszahl

Der Innenwinkel eines n-Ecks ist $\pi - \frac{2\pi}{n}$. Bei jedem Anfügen eines n-Eckes wird also um diesen Winkel weitergedreht. Die Schließungsbedingung führt auf:

$$a\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = 2\pi u \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{u} = \frac{2n}{n-2} \tag{1}$$

Weiter müssen a und u teilerfremd sein (um Ehrenrunden zu vermeiden). Somit ergibt sich für gegebenes n:

$$
\begin{aligned}
a(n) &= \text{Zähler von } \left(\frac{2n}{n-2}\right) = \frac{2n}{\operatorname{ggT}(2n, n-2)} \\
u(n) &= \text{Nenner von } \left(\frac{2n}{n-2}\right) = \frac{n-2}{\operatorname{ggT}(2n, n-2)}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Dadurch, dass wir zuerst den Bruch $\frac{2n}{n-2}$ bilden und kürzen und erst anschließend in Zähler und Nenner aufteilen, erreichen wir, dass a und u teilerfremd sind.

n	a	u
3	6	1
4	4	1
5	10	3
6	3	1
7	14	5
8	8	3
9	18	7
10	5	2
11	22	9
12	12	5
13	26	11
14	7	3
15	30	13
16	16	7
17	34	15
18	9	4
19	38	17
20	20	9

n	a	u
21	42	19
22	11	5
23	46	21
24	24	11
25	50	23
26	13	6
27	54	25
28	28	13
29	58	27
30	15	7
31	62	29
32	32	15
33	66	31
34	17	8
35	70	33
36	36	17
37	74	35
38	19	9
39	78	37
40	40	19

Tab. 1: Eckenzahl, Anzahl, Umlaufszahl

5 Rationales

Wenn wir in (2) die rationale Zahl $\frac{5}{2}$ einsetzen, ergibt sich:

$$a\left(\tfrac{5}{2}\right)=10, \quad u\left(\tfrac{5}{2}\right)=1 \tag{3}$$

Beim $\frac{5}{2}$-Eck haben wir also mit 10 Exemplaren schon nach einem Umlauf eine Schließungsfigur. Das $\frac{5}{2}$-Eck ist das Pentagramm (Abb. 4a). Die Zahl 2 im Nenner bedeutet, dass auf dem Umkreis jeweils jede zweite Ecke genommen wird.
Das angefügte zweite Pentagramm (Abb. 4b) überlappt sich teilweise mit dem ersten.

Abb. 4: Pentagramm

Im Folgenden einige Beispiele dieser Art.

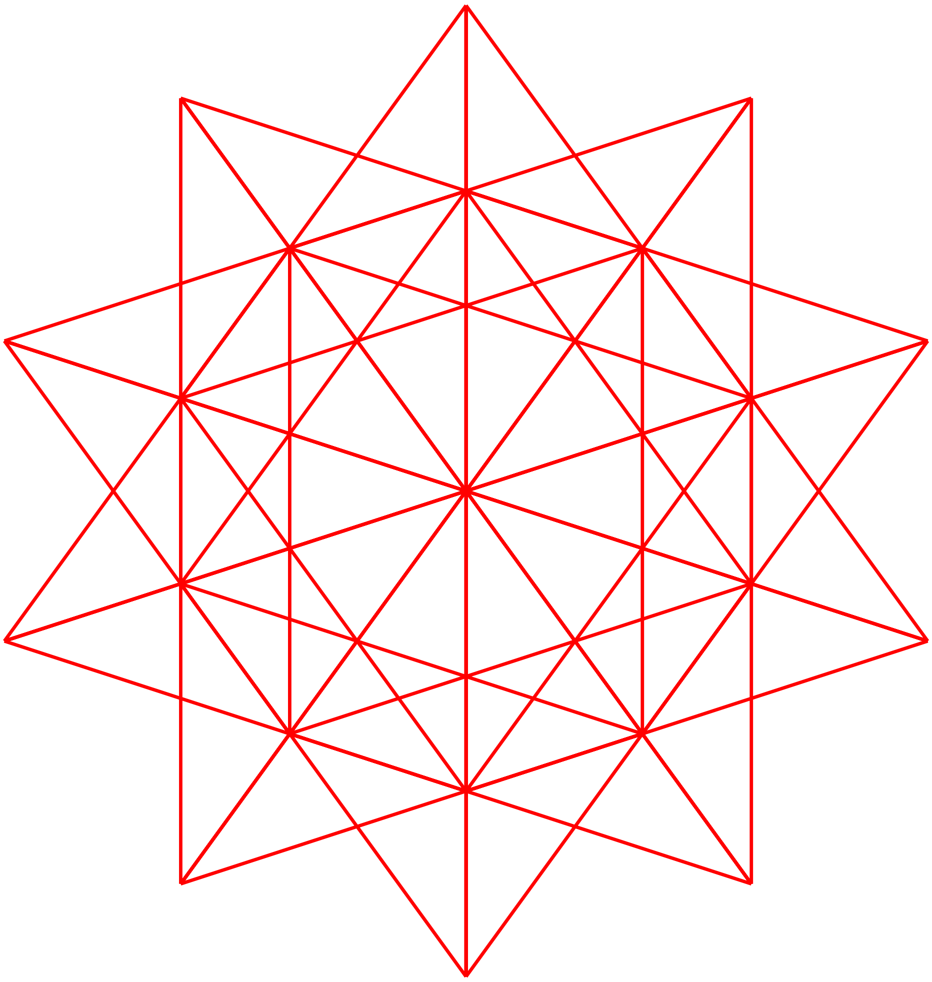


Abb. 5.$\frac{5}{2}$: Eckenzahl = $\frac{5}{2}$, Anzahl = 10, Umlaufszahl = 1

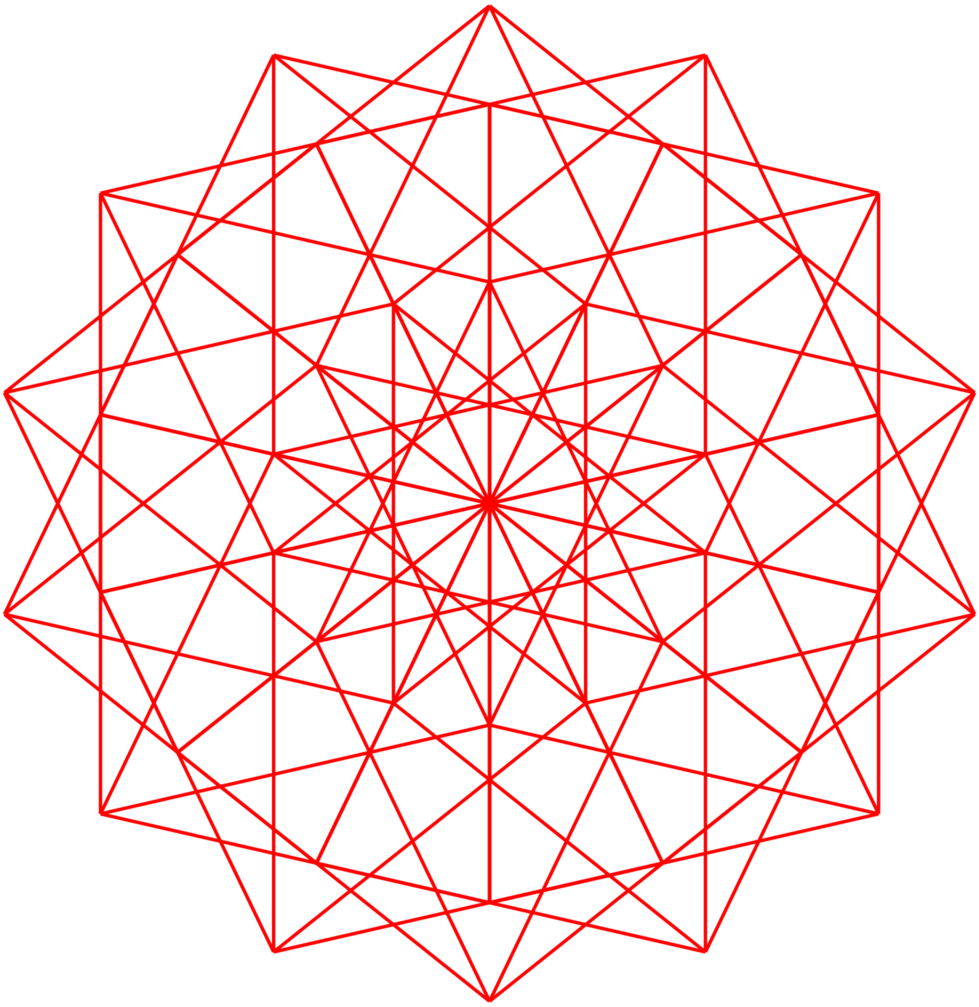


Abb. 5.$\frac{7}{2}$: Eckenzahl = $\frac{7}{2}$, Anzahl = 14, Umlaufszahl = 3

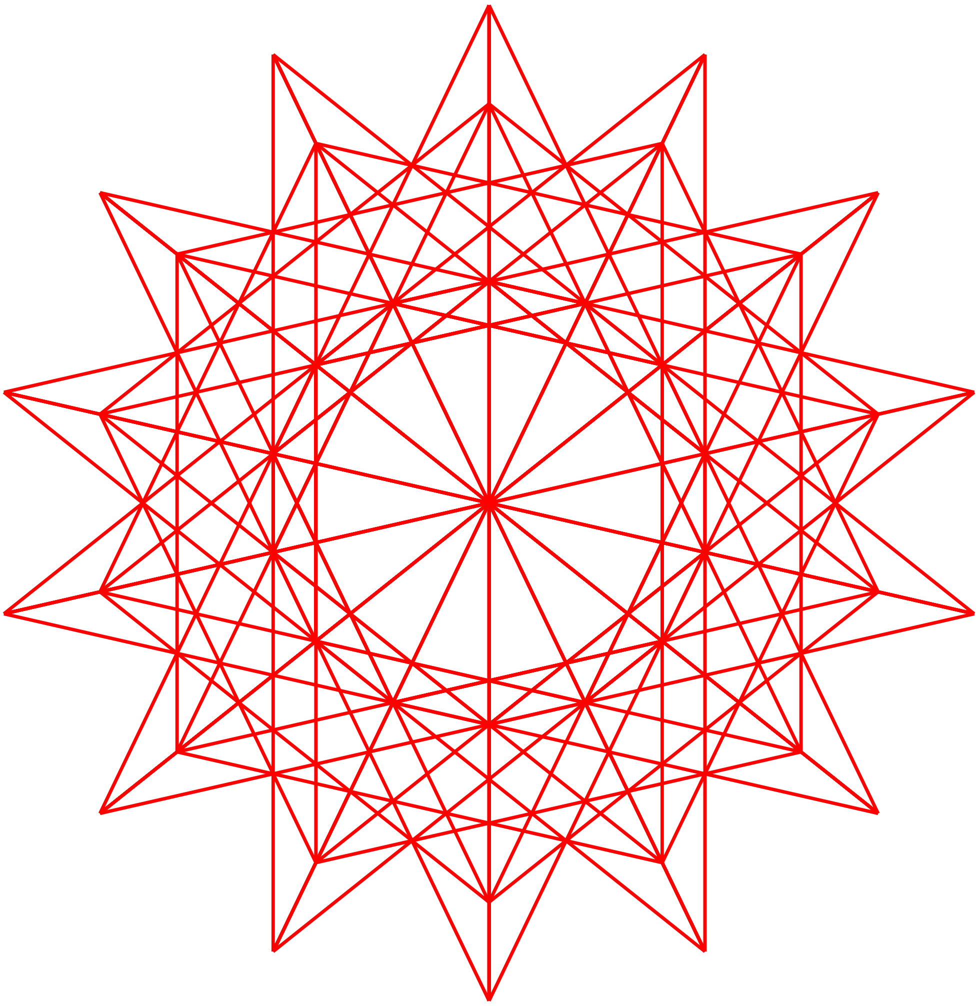


Abb. 5.$\frac{7}{3}$: Eckenzahl = $\frac{7}{3}$, Anzahl = 14, Umlaufszahl = 1

Websites

[1] The on-line encyclopedia of integer sequences
https://oeis.org/A145979