Hans Walser, [20200610]

Rechtecksfolgen

1 Worum geht es?

Eine Eigenschaft des DIN-Rechteckes lässt sich auf zwei Arten verallgemeinern.

2 Das DIN-Rechteck

Das DIN-Rechteck hat das Seitenverhältnis $\sqrt{2}:1$. Über das DIN-Format siehe Walser (2013). Wird von einem DIN-Rechteck ein Quadrat abgeschnitten, bleibt ein Rechteck übrig (das sogenannte „silberne" Rechteck), dessen Diagonalen sich unter 45° schneiden (Abb. 1).

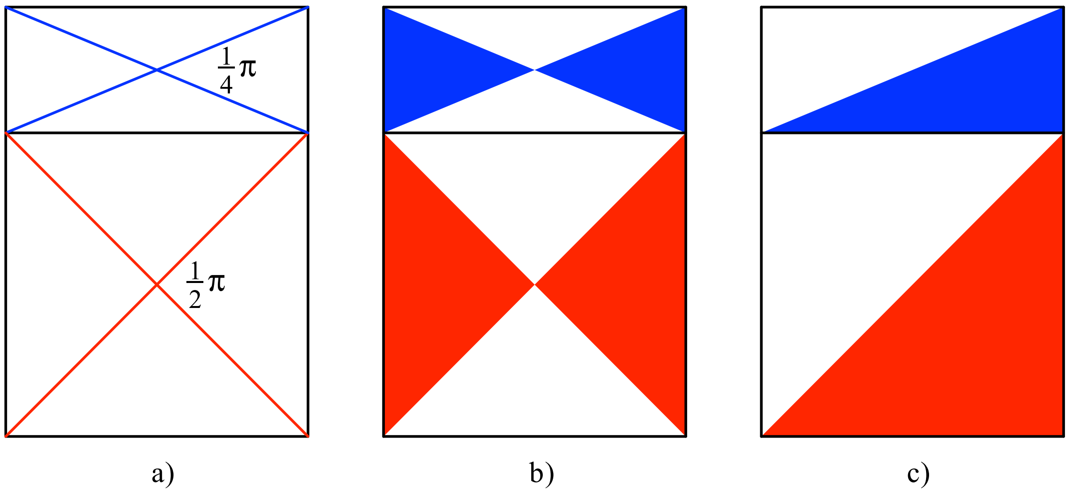


Abb. 1: DIN-Rechteck

Die Frage ist, welche Kriterien für ein weiteres Rechteck gelten sollen:

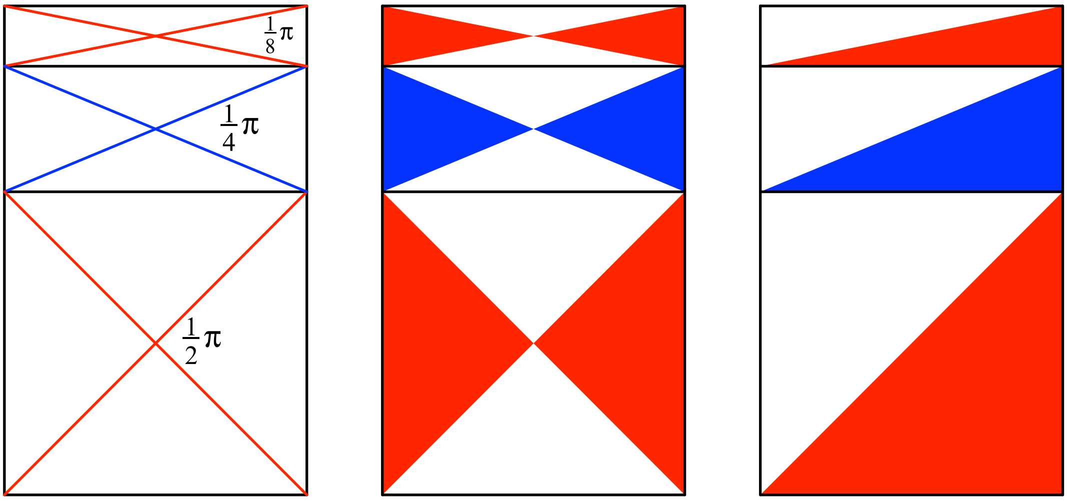
a) Fortlaufendes Halbieren des Diagonalen-Schnittwinkels. Dies führt zu einer geometrischen Folge.

b) Abnahme des Diagonalen-Schnittwinkels im Sinne einer harmonischen Folge, also Halbieren, Dritteln, Vierteln, Fünfteln und so weiter.

3 Fortlaufendes Halbieren des Diagonalen-Schnittwinkels

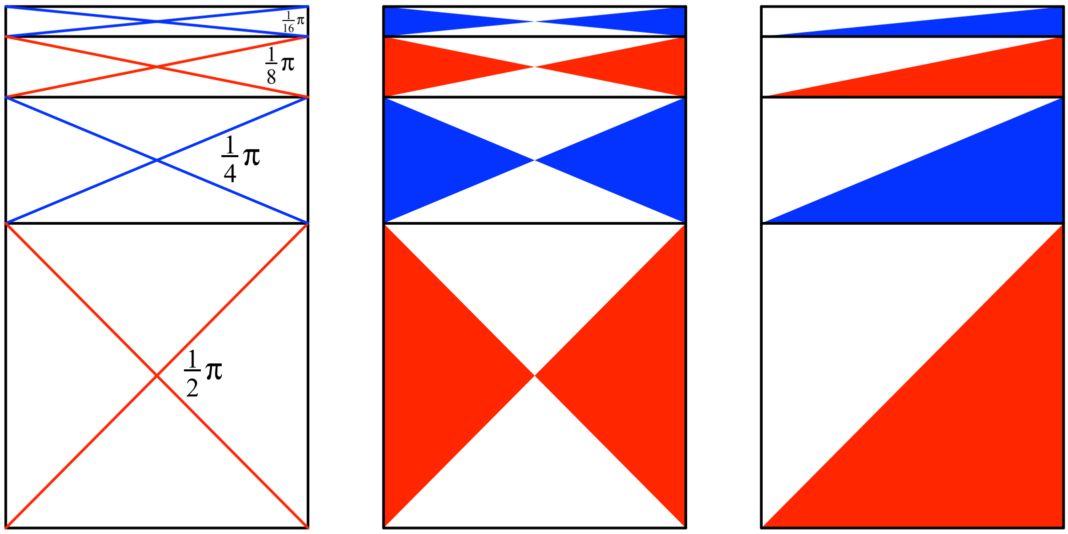
3.1 Die Figuren

Die Abbildungen 2 und 3 zeigen die beiden nächsten Schritte.



a) b) c)

Abb. 2: Nächster Schritt



a) b) c)

Abb. 3: Übernächster Schritt

Die Diagonalenschnittwinkel sind der Reihe nach: $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{16}\pi, \frac{1}{32}\pi, \ldots$

3.2 Konvergenz

Es ist anzunehmen, dass die Rechtecksreihe konvergiert. Geometrische Reihen haben das ja an sich. Natürlich ist zu beachten, dass nur die Schnittwinkel der Diagonalen eine abnehmende geometrische Folge bilden.

Tatsächlich konvergiert auch die Rechtecksreihe (Abb. 4). Bei einer Seitenlänge 1 des Startquadrates ergibt sich mit CAS für die Höhe der Rechtecksreihe ein Grenzwert von etwa 1.809837202. Der ganze Rest macht zusammen weniger aus als das Startquadrat.

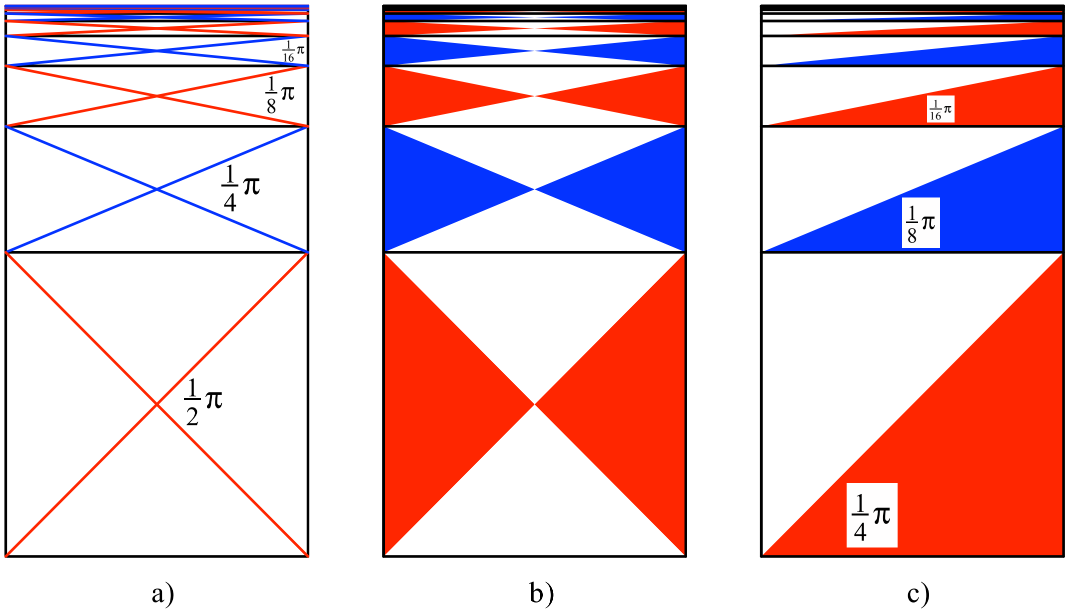


Abb. 4: Rechtecksreihe

Die Welt will betrogen sein. In der Abbildung 4 sind tatsächlich nur 20 Rechtecke (inklusive Startquadrat) gezeichnet worden. Das gibt eine Gesamthöhe von 1.809835702. Stimmt also nur auf 5 Dezimalstellen.

Nun zum Beweis der Konvergenz. Aus der Abbildung 4c lesen wir für die Gesamthöhe ab:

$$\text{Gesamthöhe} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\left(\tfrac{1}{8}\pi\right) + \tan\left(\tfrac{1}{16}\pi\right) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \tan\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \tfrac{1}{4}\pi\right) \qquad (1)$$

Wir arbeiten mit dem Majorantenkriterium. Für $x \in [0,1]$ ist $\tan\left(x\frac{1}{4}\pi\right) \leq x$ (Abb. 5).

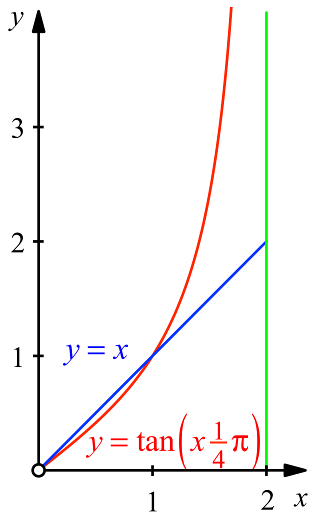


Abb. 5: Majorante

Somit folgt aus (1):

$$\text{Gesamthöhe} = \sum_{n=0}^{\infty} \tan\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \tfrac{1}{4}\pi\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n = 2 \tag{2}$$

Vergleiche dazu [1].

3.3 Schöne Figuren

Die roten und blauen Dreiecke der Abbildung 4b können gemäß Abbildung 6 angeordnet werden.

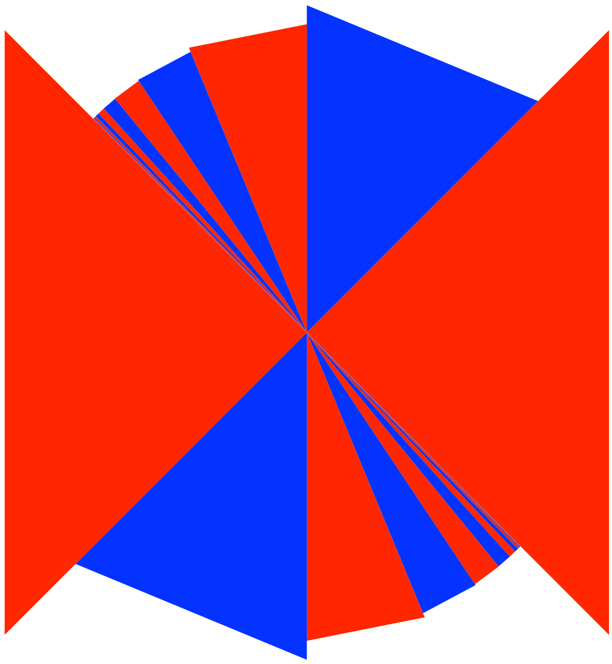


Abb. 6: Schöne Figur

Die roten und blauen Dreiecke der Abbildung 4c können gemäß Abbildung 7 angeordnet werden (vgl. [1]).

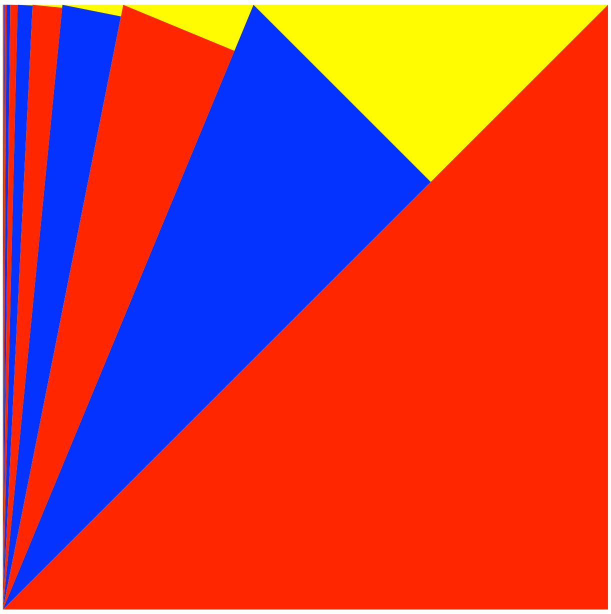
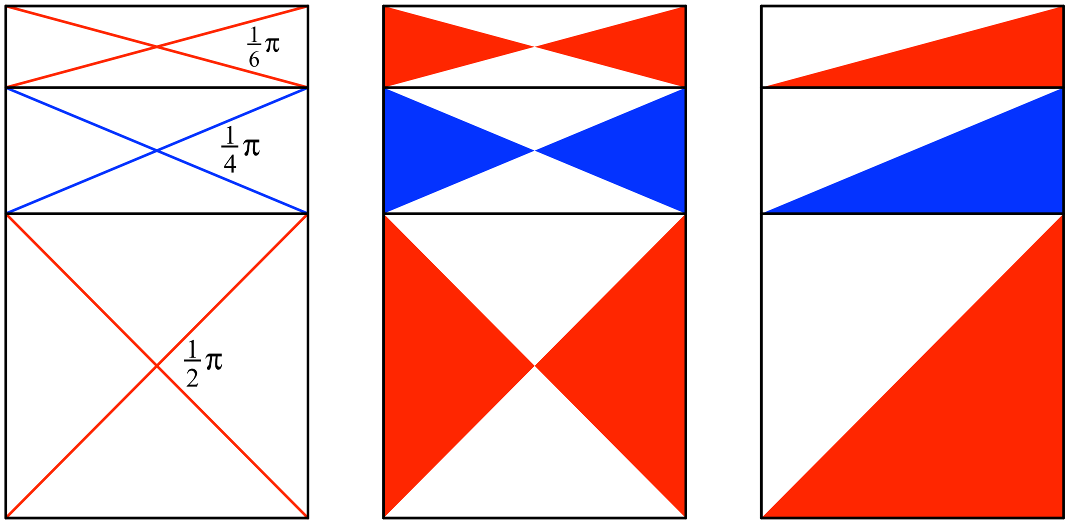


Abb. 7: Noch eine schöne Figur

Die oberen Ecken der Dreiecke liegen exakt auf der Oberkante des unterlegten gelben Einheitsquadrates. Damit kann die Konvergenz von (1) illustriert werden. Das Rechteck der Abbildung 4c hat die Breite 1. Damit hat seine Gesamthöhe die gleiche Maßzahl wie die Fläche. Die roten und blauen Dreiecke machen die halbe Fläche aus. Diese ist nach Abbildung 7 kleiner als 1. Somit ist die Gesamthöhe kleiner als 2.

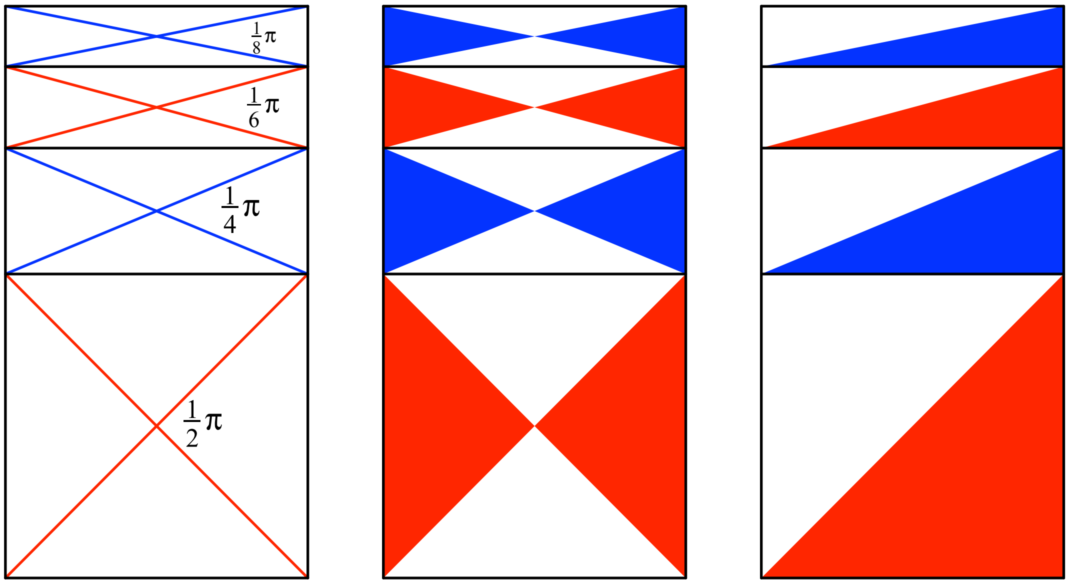
4 Harmonische Abnahme

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen die beiden nächsten Schritte.



a) b) c)

Abb. 8: Nächster Schritt



a) b) c)

Abb. 9: Übernächster Schritt

Die Diagonalenschnittwinkel sind der Reihe nach: $\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{1}{10}\pi, \ldots$

Die Abbildung 10 zeigt die Situation nach 20 Schritten.

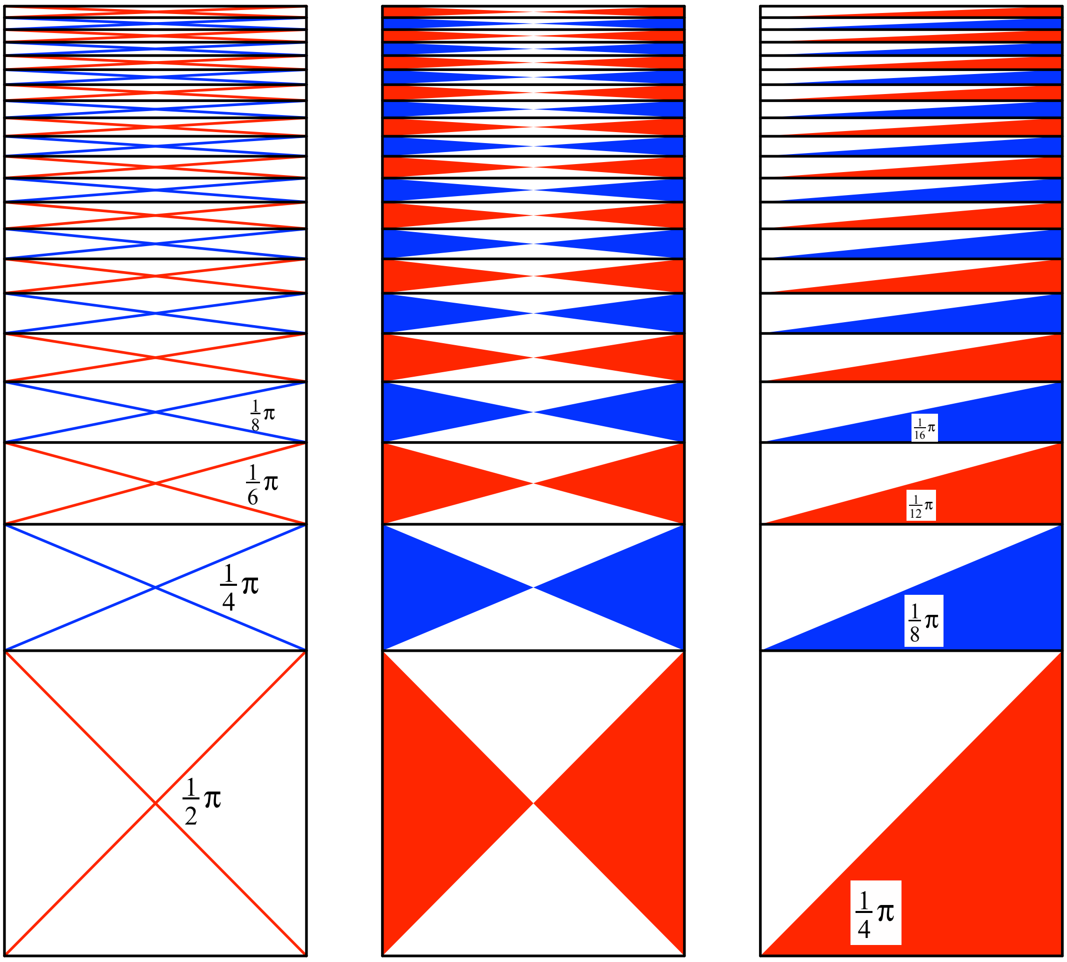


Abb. 10: Nach 20 Schritten

Die Sache divergiert (war zu erwarten). Für den Beweis der Divergenz arbeiten wir mit dem Minorantenkriterium. Zunächst ist für $x \in \left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$: $\tan(x) > x$

Die Gesamthöhe wäre:

$$
\begin{aligned}
\text{Gesamthöhe} &= \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\left(\tfrac{1}{8}\pi\right) + \tan\left(\tfrac{1}{12}\pi\right) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\tfrac{1}{n}\tfrac{1}{4}\pi\right) > \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Nun ist in (3) die letzte Reihe aber die divergente harmonische Reihe.

Literatur

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-69-1.

Websites

[1] Hans Walser: Beweis ohne Worte
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/B/Beweis_ohne_Worte3/Beweis_ohne_Worte3.htm