Hans Walser, [20200818]

Quersummen

1 Worum geht es?

Quersummen in der Darstellung mit der Basis b.

2 Geometrischer Einstieg

Basis $b = 2$.

Wir beginnen mit einem Kreis im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (Abb. 1.0).

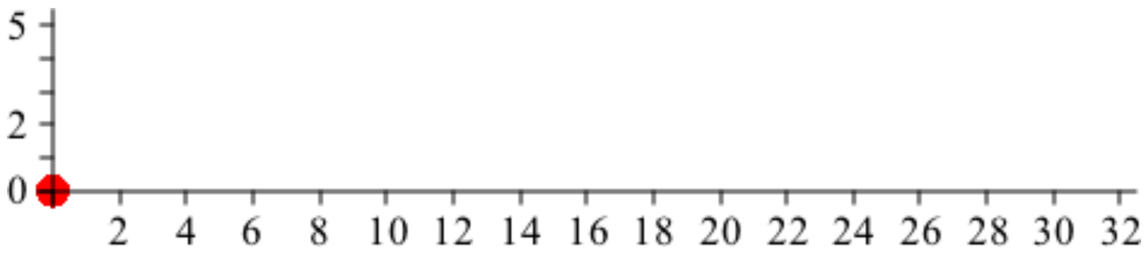

Abb. 1.0: Kreis im Ursprung

Wir verschieben eine Kopie dieses Kreises um eine Einheit nach rechts und um eine Einheit nach oben (Abb. 1.1).

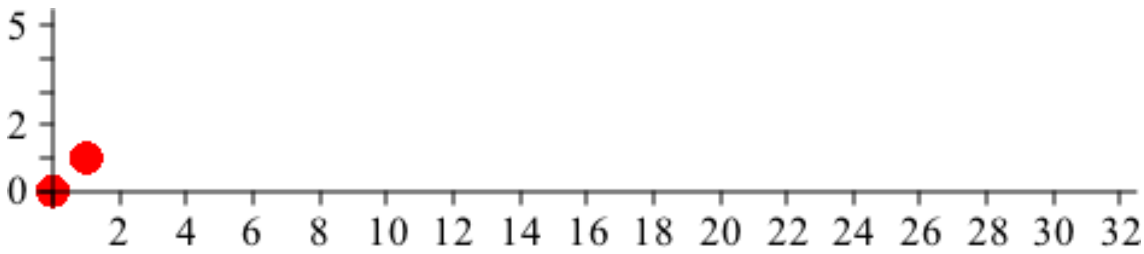

Abb. 1.1: Original und Kopie

Nun verschieben wir eine Kopie der Gesamtfigur (also der beiden Kreise) um 2 Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben (Abb. 1.2).

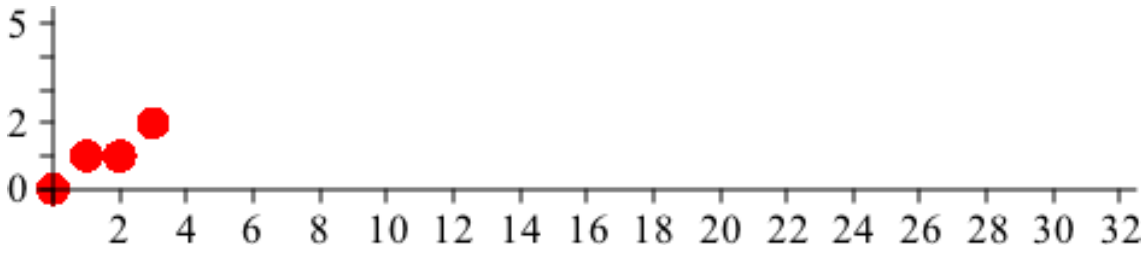

Abb. 1.2: Original und Kopie

Nun verschieben wir eine Kopie der Gesamtfigur (also der vier Kreise) um 4 Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben (Abb. 1.3).

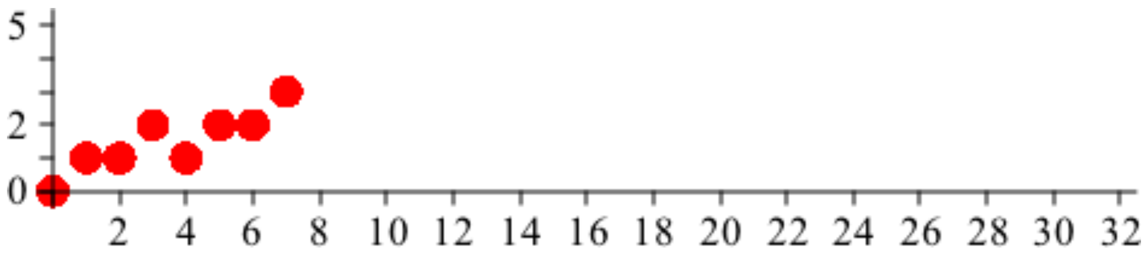

Abb. 1.3: Original und Kopie

Nun verschieben wir eine Kopie der Gesamtfigur (also der acht Kreise) um 8 Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben (Abb. 1.4).

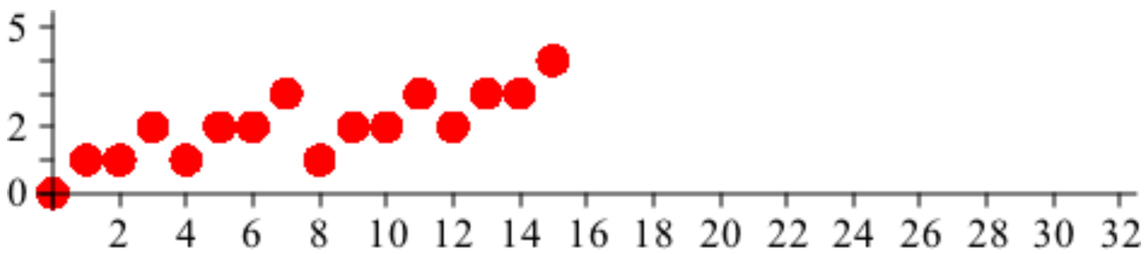

Abb. 1.4: Original und Kopie

Nun verschieben wir eine Kopie der Gesamtfigur (also der 16 Kreise) um 16 Einheiten nach rechts und um eine Einheit nach oben (Abb. 1.5).

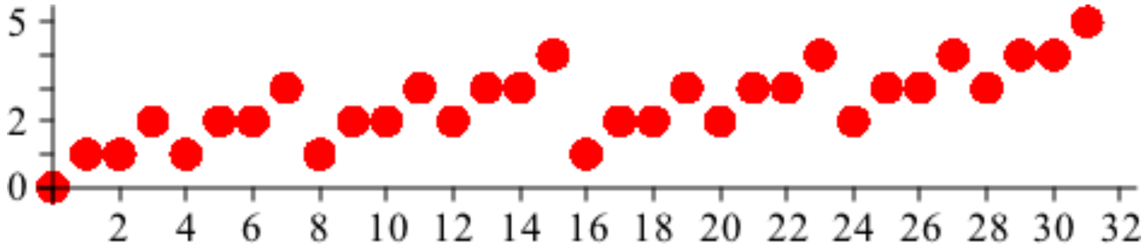

Abb. 1.5: Original und Kopie

Wir sehen, wie der Rekursion läuft: In der Abbildung 1.n haben wir 2^n Kreise. Wir verschieben eine Kopie davon um 2^n Einheiten nach rechts und eine Einheit nach oben.

3 Diskussion

In der Abbildung 2 ist der obere Anschlag eingezeichnet.

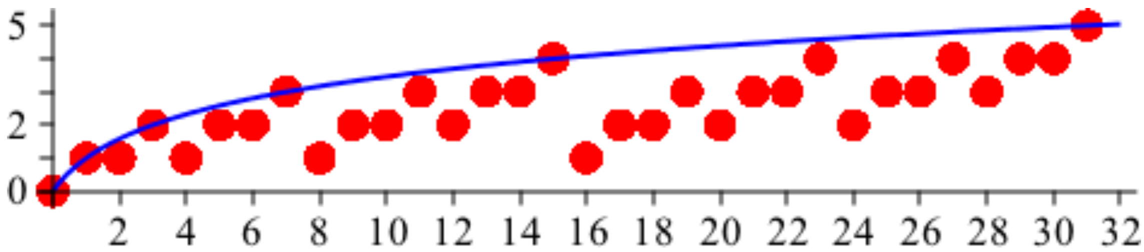

Abb. 2: Oberer Anschlag

Die blaue Kurve hat die Gleichung:

$$y = \log_2 (x+1) \tag{1}$$

Im Wesentlichen also der Logarithmus zur Basis 2. Bei 0, 1, 3, 7, 15, 31, .. haben wir den oberen Anschlag auf den entsprechenden Niveaus 0, 1, 2, 3, 4, 5, .. .

Bei 1, 2, 4, 8, 16, .. haben wir den unteren Anschlag auf dem Niveau 1.

4 Selbstähnlichkeit

Wir färben die Kreise im Wechsel rot und blau (Abb. 3.1).

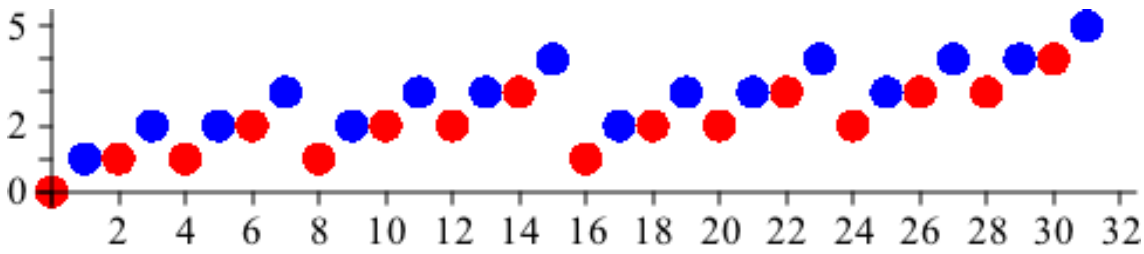

Abb. 3.1: Rot und blau

Und nun lassen wir die blauen Kreise weg (Abb. 3.2).

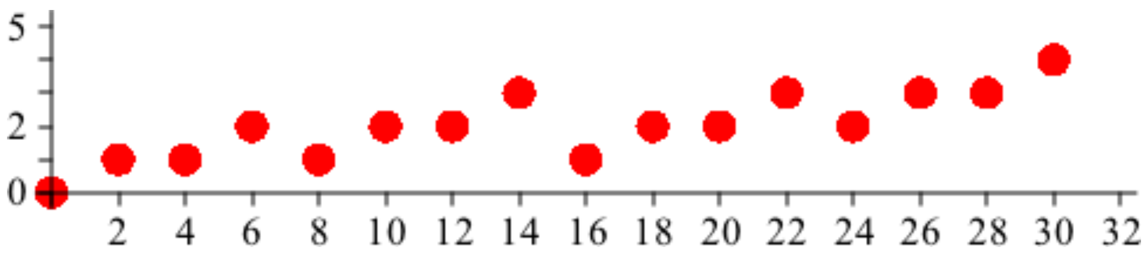

Abb. 3.2: Nur rote Kreise

Die roten Kreise allein bilden im Prinzip dieselbe Figur wie bei der Abbildung 1.4. Die Verschiebungen nach rechts sind doppelt so groß.

Wenn wir die Gesamtfigur der roten Kreise um eine Einheit nach rechts und eine Einheit nach oben schieben, erhalten wir die Situation der blauen Kreise.

Wir können also die Figuren der Abbildung 1 in zwei Teilfiguren zerlegen, die im Prinzip dieselbe Struktur haben wie die vorangehende Figur der Abbildung 1. Wir haben so etwas wie eine fraktale Struktur.

5 Niveaus

Die roten Punkte der Abbildung 1.5 haben der Reihe nach die Niveaus (Abb. 4):

0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, ..

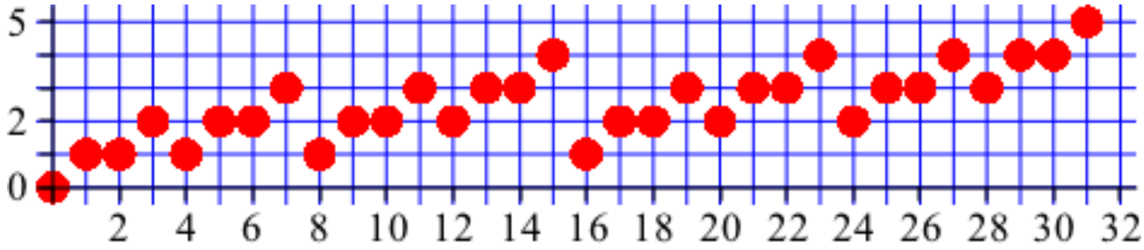

Abb. 4: Niveaus

6 Rekursion

Die Abbildung 5 illustriert die rekursive Struktur dieser Folge.

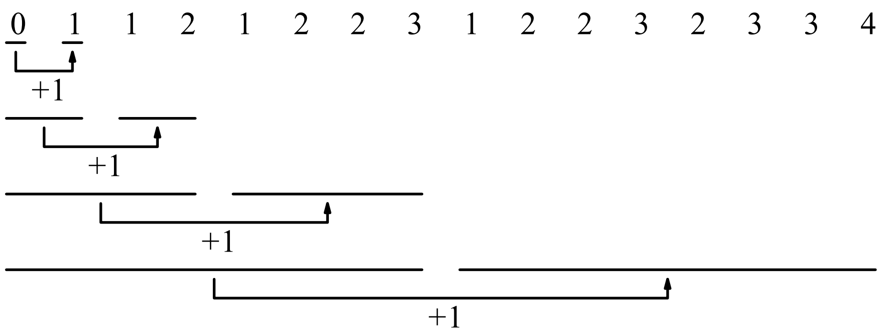

Abb. 5: Rekursive Struktur

Die Folge kann formal rekursiv definiert werden:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_n &= a_{n-2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}} + 1
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Der Beweis ergibt sich aus der Abbildung 5.

7 Quersummen

Die Tabelle 1 zeigt n, unsere Folge a_n und n binär. Wir sehen die Quersummeneigenschaft.

n	a_n	n binär
0	0	0
1	1	1
2	1	10
3	2	11
4	1	100
5	2	101
6	2	110
7	3	111
8	1	1000
9	2	1001
10	2	1010
11	3	1011
12	2	1100
13	3	1101
14	3	1110
15	4	1111

n	a_n	n binär
16	1	10000
17	2	10001
18	2	10010
19	3	10011
20	2	10100
21	3	10101
22	3	10110
23	4	10111
24	2	11000
25	3	11001
26	3	11010
27	4	11011
28	3	11100
29	4	11101
30	4	11110
31	5	11111

Tab. 1: Vergleich

8 Verallgemeinerung

Statt mit der Basis 2 arbeiten wir mit der Basis b. Analog zu (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= a_{n-b^{\lfloor \log_b(n) \rfloor}} + 1 \end{aligned} \qquad (3)$$

Für $b = 3$ erhalten wir die Werte der Tabelle 2.

n	a_n	n Basis 3
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	1	10
4	2	11
5	3	12
6	2	20
7	3	21
8	4	22
9	1	100
10	2	101
11	3	102
12	2	110
13	3	111

n	a_n	n Basis 3
14	4	112
15	3	120
16	4	121
17	5	122
18	2	200
19	3	201
20	4	202
21	3	210
22	4	211
23	5	212
24	4	220
25	5	221
26	6	222

Tab. 2: Basis 3

Die Abbildung 6 zeigt die zugehörige Visualisierung. Die blaue Kurve hat die Gleichung:

$$y = \log_3(x+1) \qquad (4)$$

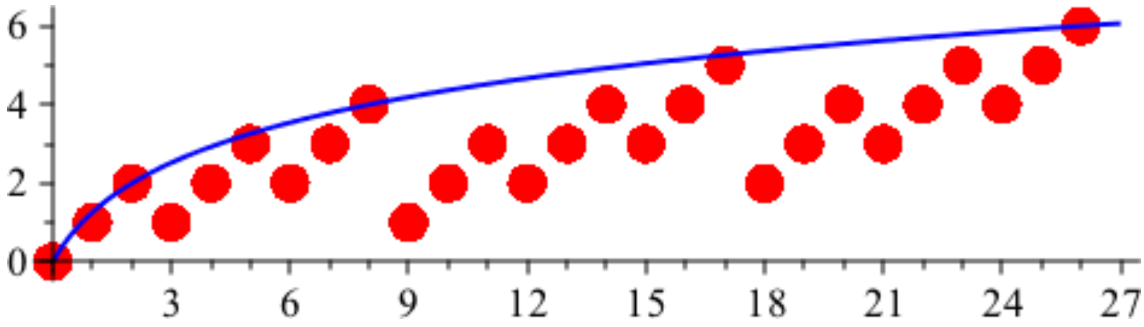

Abb. 6: Basis 3

Für $b = 4$ erhalten wir die Werte der Tabelle 3.

n	a_n	n_4
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	1	10
5	2	11
6	3	12
7	4	13
8	2	20
9	3	21
10	4	22
11	5	23
12	3	30
13	4	31
14	5	32
15	6	33

n	a_n	n_4
16	1	100
17	2	101
18	3	102
19	4	103
20	2	110
21	3	111
22	4	112
23	5	113
24	3	120
25	4	121
26	5	122
27	6	123
28	4	130
29	5	131
30	6	132
31	7	133

n	a_n	n_4
32	2	200
33	3	201
34	4	202
35	5	203
36	3	210
37	4	211
38	5	212
39	6	213
40	4	220
41	5	221
42	6	222
43	7	223
44	5	230
45	6	231
46	7	232
47	8	233

n	a_n	n_4
48	3	300
49	4	301
50	5	302
51	6	303
52	4	310
53	5	311
54	6	312
55	7	313
56	5	320
57	6	321
58	7	322
59	8	323
60	6	330
61	7	331
62	8	332
63	9	333

Tab. 3: Basis 4

Die Abbildung 7 zeigt die zugehörige Visualisierung.

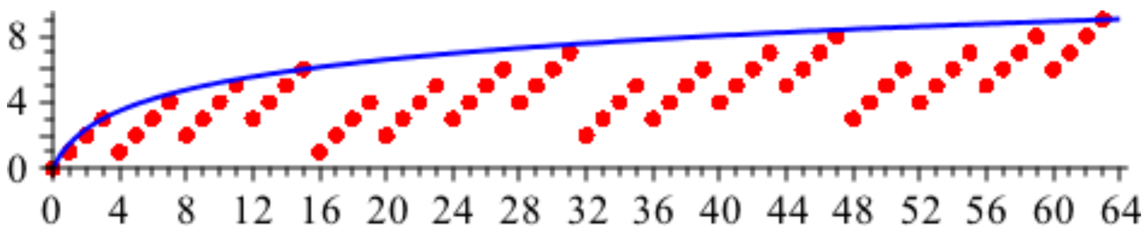

Abb. 7: Basis 4

Die blaue Kurve hat die Gleichung:

$$y = \log_4(x+1) \tag{5}$$

Websites

The on-line encyclopedia of integer sequences
https://oeis.org/A000120
The on-line encyclopedia of integer sequences
https://oeis.org/A053735
The on-line encyclopedia of integer sequences
https://oeis.org/A053737