Hans Walser, [20121219]

Quadratische Ergänzung

Anregungen: M. H. und T. S., V.

1 Worum geht es?

Die so genannte *quadratische Ergänzung* (sprachlich korrekt: *Ergänzung zum Quadrat*) ist ein gerne gebrauchtes Vehikel zur Einführung in das Thema der quadratischen Gleichungen. In der Regel werden zwei oder drei Beispiele mit der quadratischen Ergänzung durchgerechnet, und dann wird mit Hilfe der quadratischen Ergänzung die Lösungsformel für den allgemeinen Fall hergeleitet. Ab sofort ist dann die Anwendung der Lösungsformel gefragt, und die quadratische Ergänzung gerät in Vergessenheit.

Im Folgenden wird ein Beispiel gezeigt, in welchem die quadratische Ergänzung unmittelbar zu einer einfachen Konstruktionsmethode führt.

2 Das Beispiel

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC in der üblichen Beschriftung (Abb. 1) seien die Kathete a und der unterhalb der anderen Kathete liegende Hypotenusenabschnitt q gegeben. Gesucht ist der andere Hypotenusenabschnitt, also p.

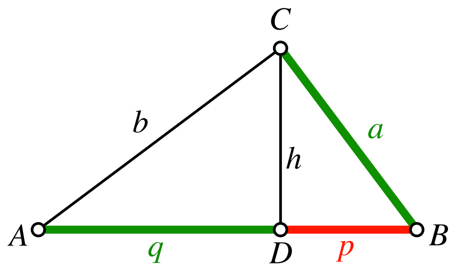

Abb. 1: Situation

3 Rechnerische Bearbeitung

Der Kathentensatz liefert:

$$p(p+q)=a^2$$

Das ist eine quadratische Gleichung für p. Die allgemeine Lösungsformel ergibt:

$$p_{1,2}=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4a^2}}{2}$$

Unsere Lösung muss positiv sein, also:

$$p=\frac{-q+\sqrt{q^2+4a^2}}{2}$$

Es gibt verschiedene Methoden, eine quadratische Gleichung geometrisch zu lösen. In unserem Beispiel geht es am einfachsten mit der quadratischen Ergänzung.

4 Geometrischer Lösungsweg

Wir formen die durch den Kathetensatz gegebene Gleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung um:

$$\begin{aligned} p(p+q) &= a^2 \\ \left(p+\tfrac{q}{2}\right)^2 &= a^2+\left(\tfrac{q}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat nun die Form des Satzes von Pythagoras für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a und $\frac{q}{2}$. Daraus ergibt sich unmittelbar eine Konstruktionsmethode für p (Abb. 2).

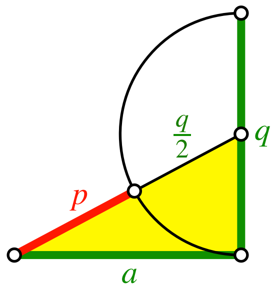

Abb. 2: Lösung

5 Sonderfall

Die Abbildung 2 erinnert an die klassische Konstruktion des Goldenen Schnittes. Für den Sonderfall $a=q$ erhalten wir tatsächlich:

$$p = a\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = a\tfrac{1}{\Phi}$$

Literatur

[Walser 2009] Walser, Hans: Der Goldene Schnitt. 5., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2009. ISBN 978-3-937219-98-1.