Hans Walser, [20190627]

Qibla

Anregung: Vortrag von Ph. U., F.

1 Worum geht es?

Berechnung der Qibla, das heißt der Richtung des Großkreisbogens nach Mekka.

2 Daten und Bezeichnungen

Kaaba in Mekka, Koordinaten: 21° 25' 21'' N, 39° 49' 34'' E
Umrechnung ins Bogenmaß: 0.37389316 N, 0.69509677 E
Standortkoordinaten: phi, lambda

3 Sphärisches Dreieck

Wir arbeiten mit dem sphärischen Dreieck ABC, wobei:
A = Standort
B = Kaaba in Mekka
C = Nordpol
Die Abbildung 1 skizziert die Situation.

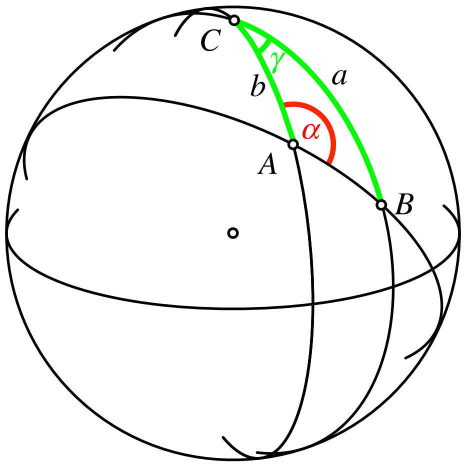

Abb. 1: Situation

Aus den geografischen Breiten von Mekka und dem Standort lassen sich a und b berechnen (Ergänzung auf π/2). Die Differenz der geografischen Längen ergibt γ.

Gesucht ist α.

4 Sphärische Trigonometrie

Die passende Formel (siehe Formelsammlung) ist:

$$\frac{1}{\tan(a)}\sin(b) = \cos(b)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Dies kann umgeformt werden zu:

$$\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{\cot(a)\sin(b)-\cos(b)\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}\right)$$

5 Beispiele

Die Richtung wird auf einem Kompass angegeben.

5.1 Saarbrücken

Koordinaten: 49.256577 N, 7.045378 E

Wir erhalten das Azimut 125.1277° (Abb. 2).

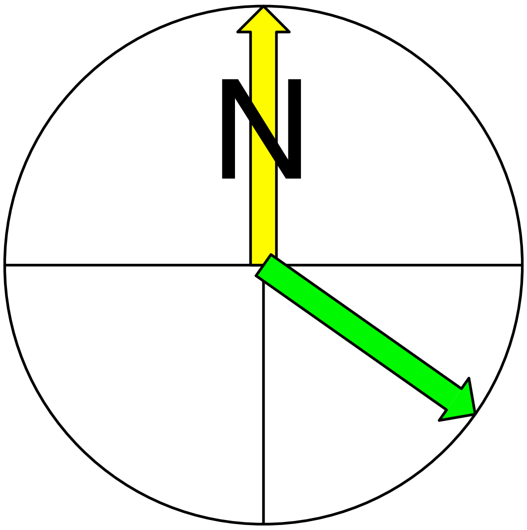

Abb. 2: Saarbrücken

5.2 Gleiche geografische Breite wie Mekka

Koordinaten: 21° 25’ 21’’ N, 10° 49’ 34’’ E

Wir erhalten das Azimut 84.6040° (Abb. 3). Die Richtung geht also nicht genau nach Osten, sondern „oben durch“. Genau nach Osten wäre ein Breitenkreis, aber kein Großkreis.

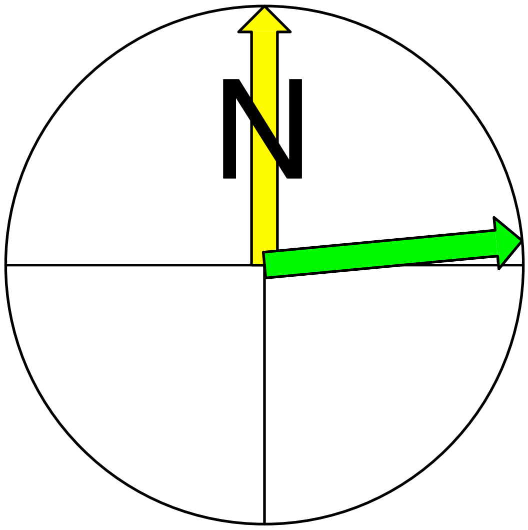

Abb. 3: Gleiche geografische Breite wie Mekka

5.3 Östlich von Mekka

Harwan Garden, Koordinaten: 34°09'34.9"N 74°54'13.8"E. Wir befinden uns nördlich und östlich von Mekka.

Wir erhalten aber formelmäßig das Azimut 76.7934° (Abb. 4).

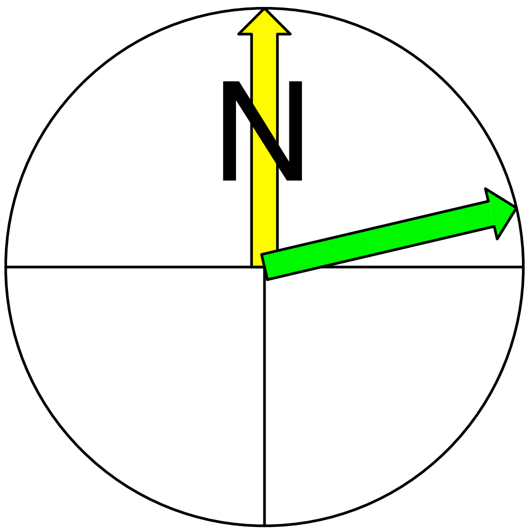

Abb. 4: Östlich von Mekka?

Das irritiert, denn der grüne Pfeil sollte nach Westen zeigen. Wir sind hier in der klassischen Tangensfalle. Der Tangens und der Kotangens haben einen sehr eingeschränkten Bijektivitätsbereich. Man muss mit Zusatzbedingungen (Vorzeichen) allenfalls 180° addieren. Man kann es aber auch so sehen: Es wird hier der große Großkreisbogen, also der „hintenherum“, gewählt.

6 Zeichnerische Lösung

6.1 In der stereografischen Projektion

Auf einer Karte in stereografischer Projektion kann die Qibla bestimmt werden wie folgt (Abb. 5).

Abb. 5: Grafische Bestimmung

- Diametraler Punkt zu Mekka (im Prinzip Spiegelung am Hauptkreis, aber auf die andere Seite)
- (Planimetrischer) Kreis durch Standort, Mekka und diametralen Punkt von Mekka. Dies ist das stereografische Bild des gesuchten Großkreises.
- Da die stereografische Projektion winkeltreu (conformal) ist, kann der Winkel zum Meridian durch den Standort abgelesen werden.

6.2 Ohne Karte

Das Kartenbild ist nicht erforderlich. Bei Kenntnis von phi und lambda kann die Position in der stereografischen Projektion gemäß Abbildung 6 eingezeichnet werden.

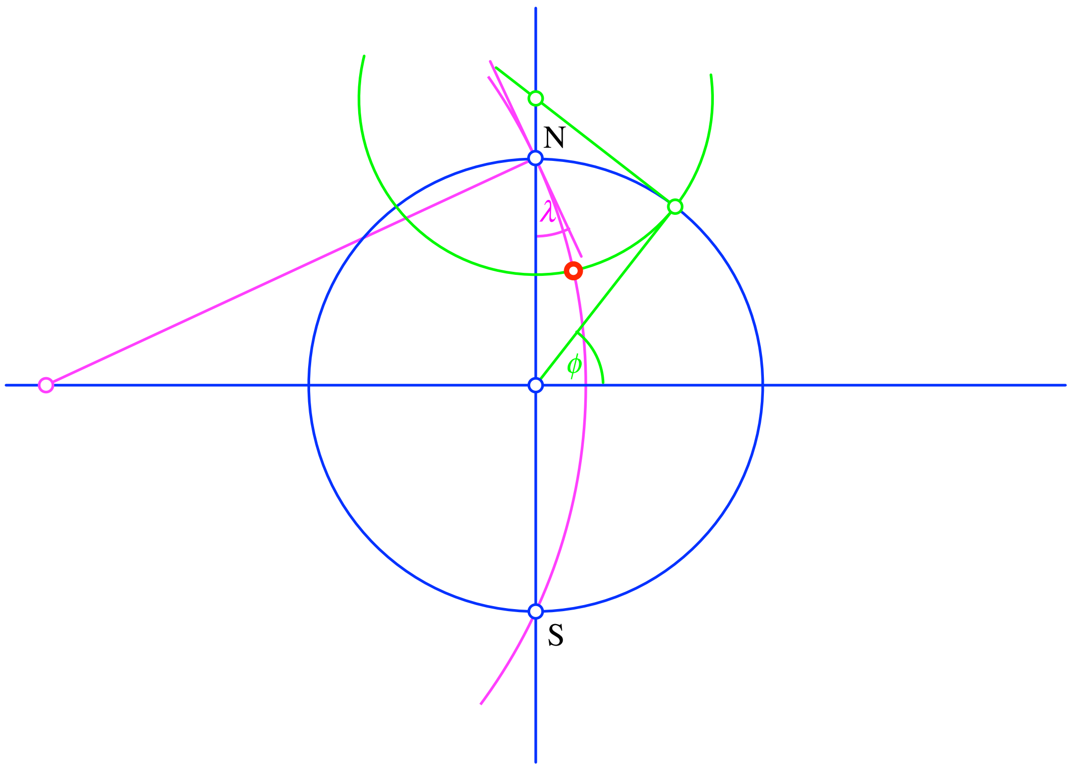

Abb. 6: Konstruktion in der stereografischen Projektion

7 Formeln der sphärischen Geometrie

7.1 Sphärische Dreiecke und Vielecke

$$f_{\Delta ABC} = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$f_{n-\text{Eck}} = r^2\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i - (n-2)\pi\right)$$

7.2 Sphärische Trigonometrie

Seiten-Cosinus-Satz

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\gamma)$$
$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\alpha)$$
$$\cos(b) = \cos(c)\cos(a) + \sin(c)\sin(a)\cos(\beta)$$

Winkel-Cosinus-Satz

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(c)$$
$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a)$$
$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma)\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\alpha)\cos(b)$$

Sinus-Satz

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$$

Cotangens-Satz, erste Gruppe

$$\frac{1}{\tan(b)}\sin(c) = \cos(c)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\frac{1}{\tan(\beta)}$$
$$\frac{1}{\tan(c)}\sin(a) = \cos(a)\cos(\beta) + \sin(\beta)\frac{1}{\tan(\gamma)}$$
$$\frac{1}{\tan(a)}\sin(b) = \cos(b)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

Cotangens-Satz, zweite Gruppe

$$\frac{1}{\tan(b)}\sin(a) = \cos(a)\cos(\gamma) + \sin(\gamma)\frac{1}{\tan(\beta)}$$
$$\frac{1}{\tan(c)}\sin(b) = \cos(b)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\frac{1}{\tan(\gamma)}$$
$$\frac{1}{\tan(a)}\sin(c) = \cos(c)\cos(\beta) + \sin(\beta)\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

7.3 Sphärischer Pythagoras

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$$

Websites

Kartenprojektionen
http://swai.ethz.ch/swaie/MapProjector/MapProjector.de.html