

Hans Walser, [20161208]

## Pythagoras und Fibonacci

Anregung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

### 1 Worum geht es?

Wir finden die Fibonacci-Zahlen in einem speziellen Pythagoras-Baum

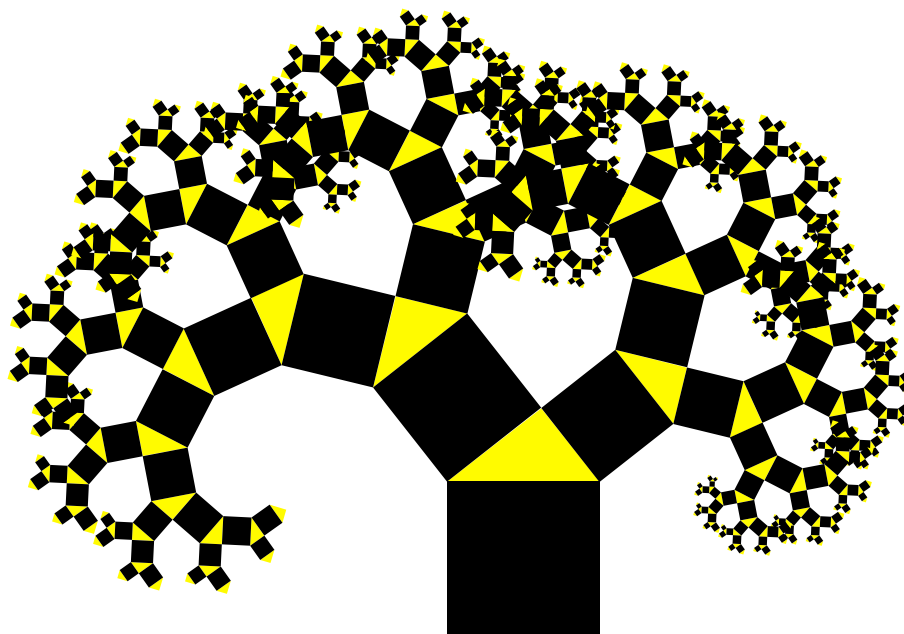
### 2 Der Pythagoras-Baum

Wir arbeiten mit einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten:

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.618, \quad b = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \approx 0.786, \quad c = 1 \quad (1)$$

Die Kathete  $a$  und die Hypotenuse  $c$  stehen im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Die Kathete  $b$  ist das geometrische Mittel von  $a$  und  $c$ .

Die Abbildung 1 gibt die Idee des zum Dreieck gehörenden Pythagoras-Baumes. Die Äste beginnen sich ab der fünften Generation zu überlappen.

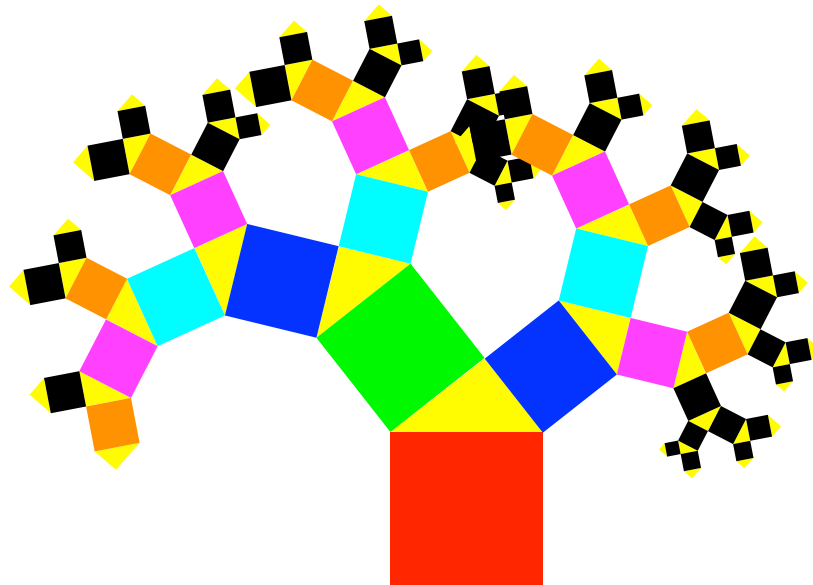


**Abb. 1: Pythagoras-Baum**

In diesem Baum erkennen wir gleich große Quadrate. So ist zum Beispiel das zweite Quadrat links im linken Ast gleich groß wie das erste Quadrat im rechten Ast. Die Stimmigkeit dieser Feststellung ergibt sich aus (1).

### 3 Quadrate gleicher Größe

Im reduzierten (um Überlappungen möglichst zu vermeiden) Beispiel der Abbildung 2 sind Quadrate gleicher Größe gleich gefärbt.



**Abb. 2: Gleiche Größe in gleicher Farbe**

Wir sortieren der Größe nach (Tab. 1).

Farbe	Anzahl
rot	1
grün	1
blau	2
hellblau	3
magenta	5
orange	8

**Tab. 1: Farbe und Anzahl**

Wir erkennen die Fibonacci-Zahlen.

Beweis induktiv.

Wir können auch die gelben rechtwinkligen Dreiecke der Größe nach sortieren und erhalten ebenfalls die Fibonacci-Zahlen.

#### 4 Goldenes Rechteck

Die Abbildung 3 zeigt die Spirale, welche entsteht, wenn wir im Baum sukzessive nach rechts gehen.

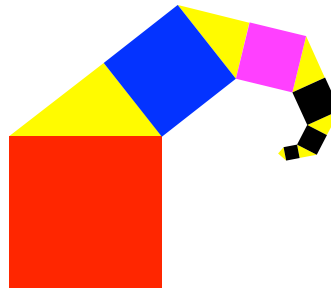


Abb. 3: Spirale

Die Folge der hier erscheinenden Quadrate können wir zum Goldenen Rechteck zusammenklappen (Abb. 4).

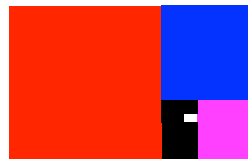


Abb. 4: Goldenes Rechteck

#### Literatur

Walser, Hans (2012): *Fibonacci. Zahlen und Figuren*. Leipzig, EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-60-8.

Walser, Hans (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig. ISBN 978-3-937219-85-1.