Hans Walser, [20210404]

Pythagoreische Dreiecke

1 Worum geht es?

Geometrischer Zugang zu den pythagoreischen Dreiecken.

2 Klassisch

Der klassische Zugang zu den primitiven (Seiten teilerfremd) pythagoreischen Dreiecken geht rechnerisch. Wir wählen die beiden Parameter u und v mit folgenden Bedingungen: $u > v$, u, v teilerfremd und $u - v$ ungerade. Dann sind

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2 \\ b &= 2uv \\ c &= u^2 + v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

die Seiten eines primitiven pythagoreischen Dreieckes. Umgekehrt lässt sich jedes primitive pythagoreische Dreieck auf diese Weise parametrisieren.

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Werte.

u	v	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	41
5	4	9	40	41

Tab. 1: Pythagoreische Tripel

3 Geometrischer Zugang

3.1 Beispiel

Für $u = 2$ und $v = 1$ ergibt sich das pythagoreische Dreieck mit den Seiten $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$. Wir konstruieren nun ein Dreieck mit diesem Seitenverhältnis wie folgt.

Wir zeichnen zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit den bieden Kathetenlängen $u = 2$ und $v = 1$ in der Disposition der Abbildung 1a. Die lange Kathete u steht senkrecht, die kurze Kathete v schaut nach rechts.

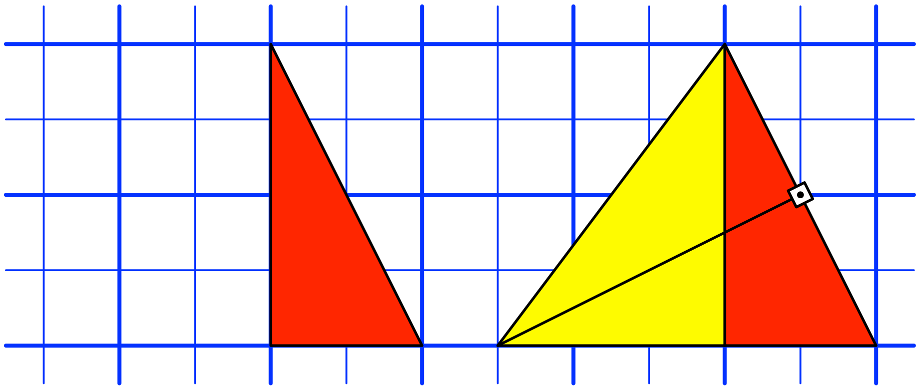

Abb. 1: Beispiel

Nun ergänzen wir dieses Dreieck mit Hilfe der Mittelsenkrechten der Hypotenuse zu einem gleichschenkligen Dreieck (Abb. 1b). Das Ergänzungsdreieck hat das Seitenverhältnis 3:4:5, ist also ein zu $u = 2$ und $v = 1$ gehörendes pythagoreisches Dreieck gemäß Tabelle 1.

3.2 Allgemein und Beweis

Wir arbeiten in einem kartesischen Koordinatensystem mit den Bezeichnungen der Abbildung 2.

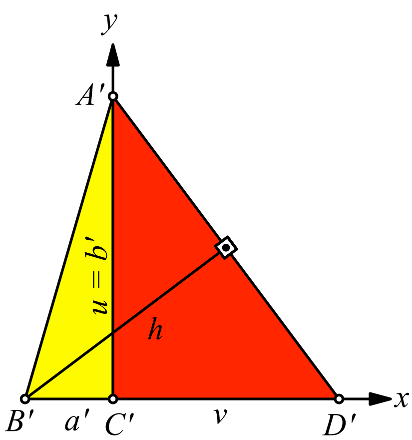

Abb. 3: Beweisfigur

Für die Mittelsenkrechte h erhalten wir die Gleichung:

$$h: \quad y = \frac{v}{u}x + \frac{u^2 - v^2}{2u} \tag{2}$$

Diese Gerade h hat die Nullstelle:

$$x_0 = -\tfrac{u^2-v^2}{2v} \tag{3}$$

Somit hat die Strecke *a'* die Länge:

$$a' = \tfrac{u^2-v^2}{2v} \tag{4}$$

Es ist also:

$$a' : b' = \tfrac{u^2-v^2}{2v} : u = \left(u^2 - v^2\right) : \left(2uv\right) \underset{(1)}{=} a : b \tag{5}$$

Dies war zu zeigen.
Bemerkung: Die Höhe h des gleichschenkligen Dreieckes ist:

$$h = \tfrac{u}{2v}\sqrt{u^2 + v^2} \tag{6}$$

Literatur

Baptist, Peter (1982): Inkreisradius und pythagoreische Zahlentripel. *Praxis der Mathematik, 24*, 161-164.

Dickson, Leonard Eugene (1920): History of the Theory of Numbers, II. Diophantine Analysis. Washington: Carnegie Institution.

Dickson, Leonard Eugene (1966): History of the Theory of Numbers; vol II. New York: Chelsea.

Foster, Colin (2016): Proof Without Words: Integer Right Triangle Hypotenuses Without Pythagoras. The College Mathematics Journal. Vol. 47, No. 2, March 2016, 101.

Sierpiński, Wacław (1962): Pythagorean Triangles. Trans. A. Sharma. Yeshiva Univ., New York, 1962. Reprinted by Dover, Minneola, NY, 2003.

Websites

Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke3/Pyth_Dreiecke3.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke3/Pyth_Dreiecke3.pdf

Hans Walser: Pythagorean Traingles
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagorean_Triangles/Pythagorean_Triangles.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagorean_Triangles/Pythagorean_Triangles.pdf

Hans Walser: Pythagoreische 60°- und 120°-Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth-60-Dreiecke/Pyth-60-Dreiecke.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth-60-Dreiecke/Pyth-60-Dreiecke.pdf

Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke/Pyth_Dreiecke.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke/Pyth_Dreiecke.pdf

Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke2/Pyth_Dreiecke2.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dreiecke2/Pyth_Dreiecke2.pdf

Hans Walser: Pythagoreische Dreiecke falten
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dr_falten/Pyth_Dr_falten.htm
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pyth_Dr_falten/Pyth_Dr_falten.pdf