

Hans Walser, [20170121a]

Anregung: L. H., F. und B. W., B.

## Puzzles

### 1 Worum geht es?

Eine klassische Puzzle-Aufgabe wird auseinandergenommen.

Im 1d-Raum (Gerade) gibt es nur eine Lösung.

In der Ebene gibt es genau zwei Lösungen.

Für den Raum und höhere Dimensionen ist unklar, ob es nur endlich viele Lösungen gibt.

### 2 Das Problem

Das Beispiel der Abbildung 1 hat 20 Randteile und 15 Binnenteile.

Gibt es ein Puzzle mit gleich viel Randteilen wie Binnenteilen?

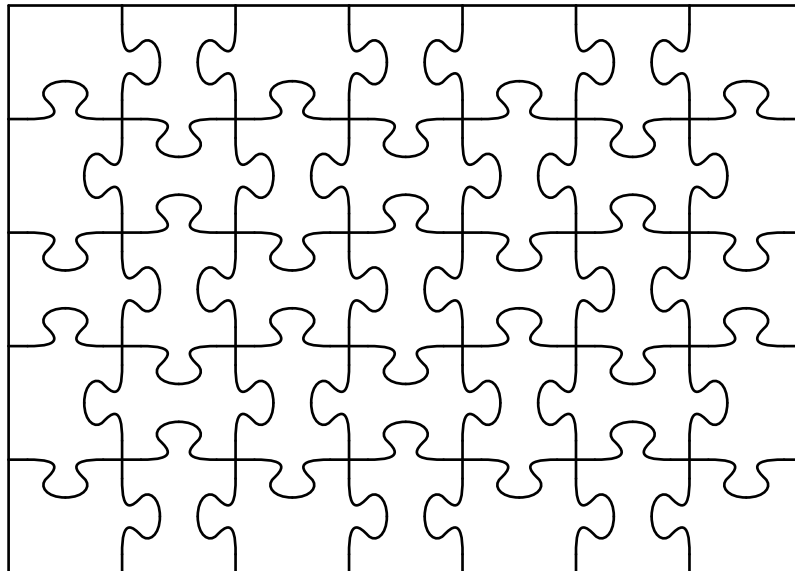


Abb. 1: Puzzle

### 3 Nachdenken über Puzzles

#### 3.1 Form und Inhalt

Thomas hat bei den Großeltern ein Puzzle mit den Bremer Stadtmusikanten. Dabei ist der Esel ein eigenes Puzzleteil, ebenso der Hund, die Katze und der Hahn. Ein solches Puzzle passt nicht in das Raster der Abbildung 1.

### 3.2 Funktionale Puzzleteile

In realweltlichen Puzzles, etwa beim Gestell aus dem Möbelladen zum Selbstbau, folgt die Form der Teile der Funktion. Die Seitenwand wird nicht in S-förmige Teile zerschnitten wie bei der Abbildung 1.

### 3.3 Symmetrie

#### 3.3.1 Symmetrie der Puzzle-Teile

Die Puzzle-Teile der Abbildung 1 sind weitgehend kongruent. Die Binnenteile bilden ein Flächenornament der Symmetrieklasse  $p4g$ .

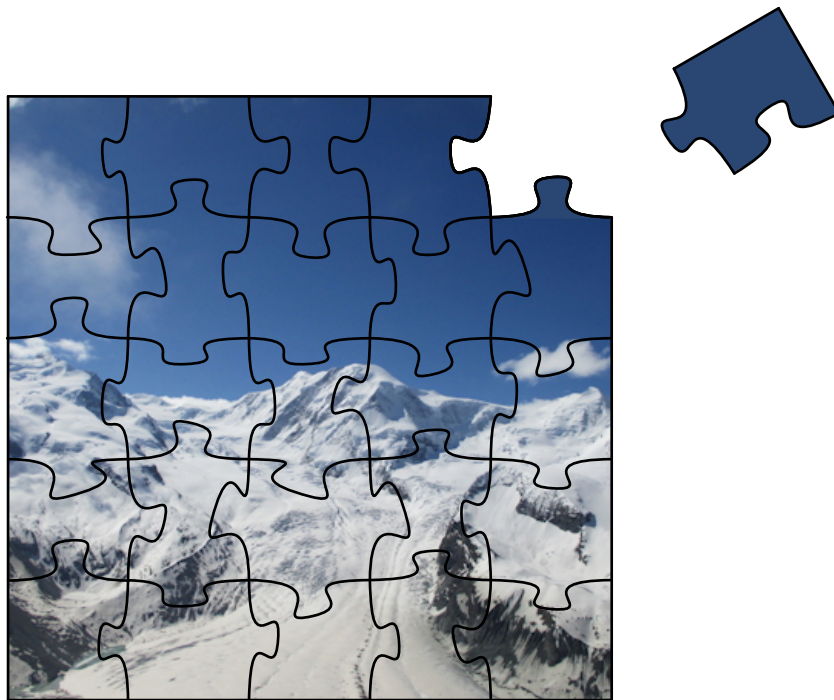
Vom Bildinhalt abgesehen sind die Binnenteile austauschbar. Sie können auf den Kopf gestellt werden und sogar umgewendet mit der Rückseite nach oben. Ähnliches gilt für die Randteile und die Eckenteile. Damit stellt sich unweigerlich die „Auf-wie-viele-Arten-kann-man-Frage“. Für das Beispiel der Abbildung 1 schlägt der Autor die Antwort (1) vor, ist sich aber bewusst, dass er sich irren kann.

$$15! \cdot 4^{15} \cdot (8! \cdot 2^8)^2 \cdot 4! = 3590307945998921659387095495475200000 \quad (1)$$

Die Chance, mit verbundenen Augen das Puzzle so hinzulegen, dass das Gesamtbild stimmt, ist also annähernd null.

Die im Handel erhältlichen oder auch selbstgebauten Puzzles haben in der Regel nicht dieses Symmetrieverhalten (Abb. 2). Hier gibt es schon aus Formgründen nur eine Möglichkeit, das Puzzle hinzulegen.

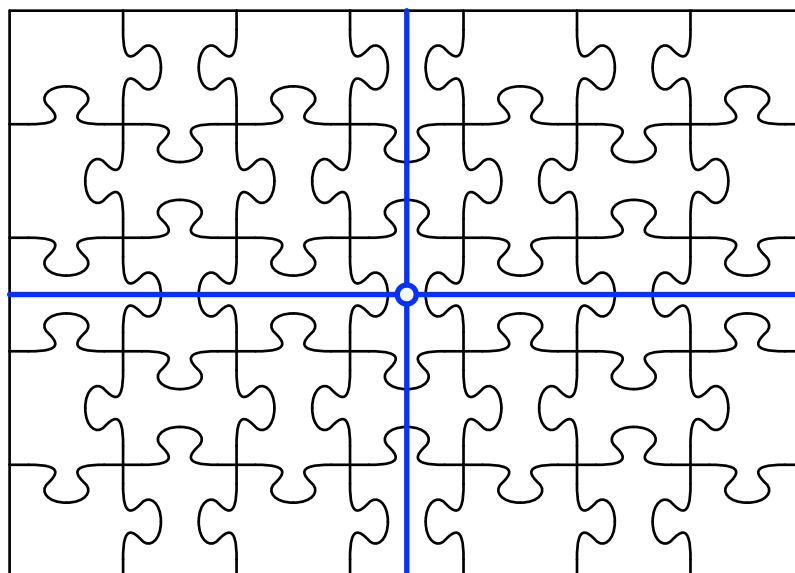
Auch in diesem Beispiel kann aber zwischen Binnenelementen und Randelementen unterschieden werden.



**Abb. 2: Asymmetrisches Puzzle**

### 3.3.2 Symmetrie des Gesamtpuzzles

Das Puzzle der Abbildung 1 hat zusätzlich zu den Symmetrien der Teile als Ganzes zwei orthogonale Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum (Abb. 3).

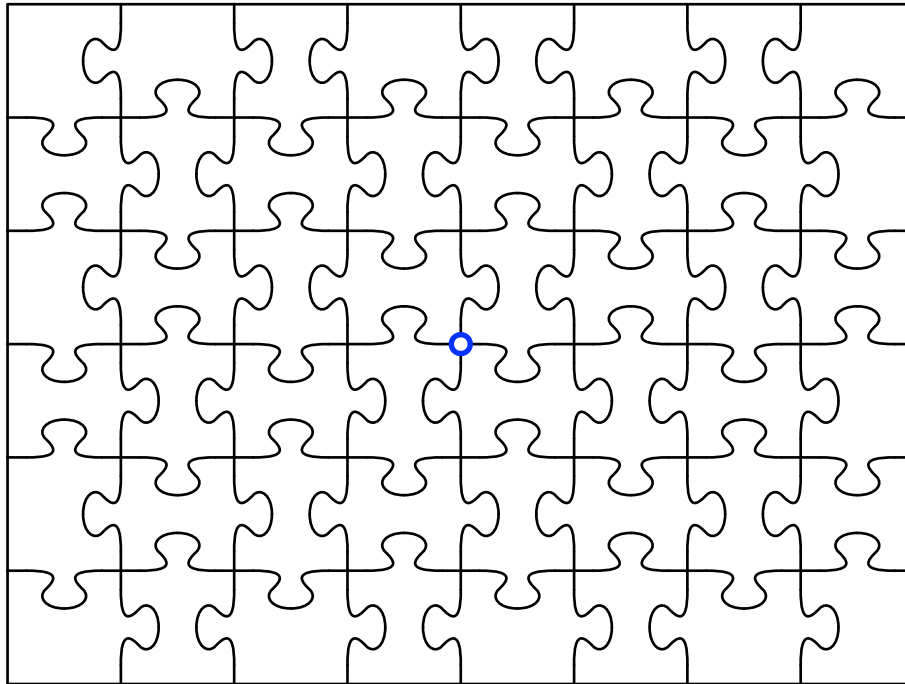


**Abb. 3: Symmetrien**

In einem Puzzle dieser Art ist die Gesamtzahl der Teile ungerade. Es ist also nicht möglich, dass es gleich viele Randteile wie Binnenteile hat.

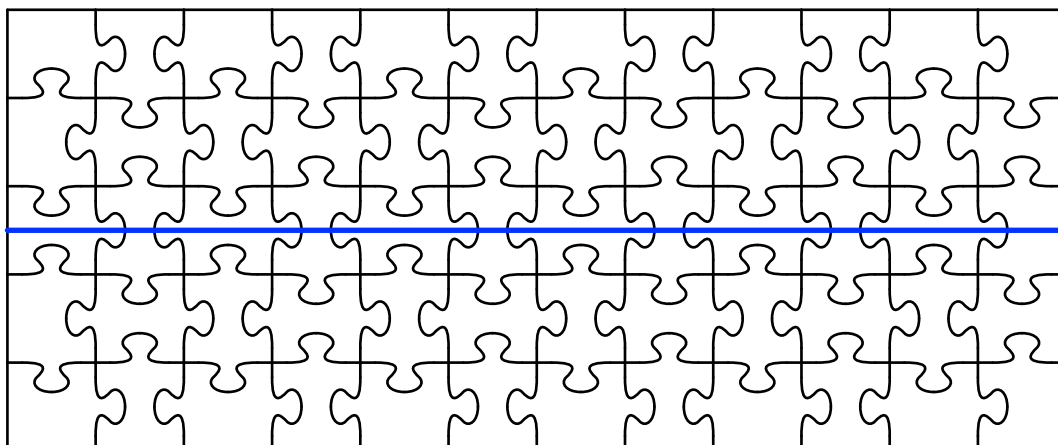
Die Abbildungen 4 und 5 zeigen zwei Beispiele mit anderen Symmetrien, dafür mit gleich vielen Randteilen wie Binnenteilen (wir werden unten sehen, dass das die beiden einzigen Lösungen sind).

Das Beispiel der Abbildung 4 hat  $8 \times 6 = 48$  Teile, davon je 24 Rand- und Binnenteile. Das Gesamtpuzzle hat lediglich Punktsymmetrie.



**Abb. 4: 48 Teile**

Das Beispiel der Abbildung 5 hat  $12 \times 5 = 60$  Teile, davon je 30 Rand und Binnenteile. Das Gesamtpuzzle hat eine Symmetrieachse.

**Abb. 5: 60 Teile**

#### 4 Quadratraster

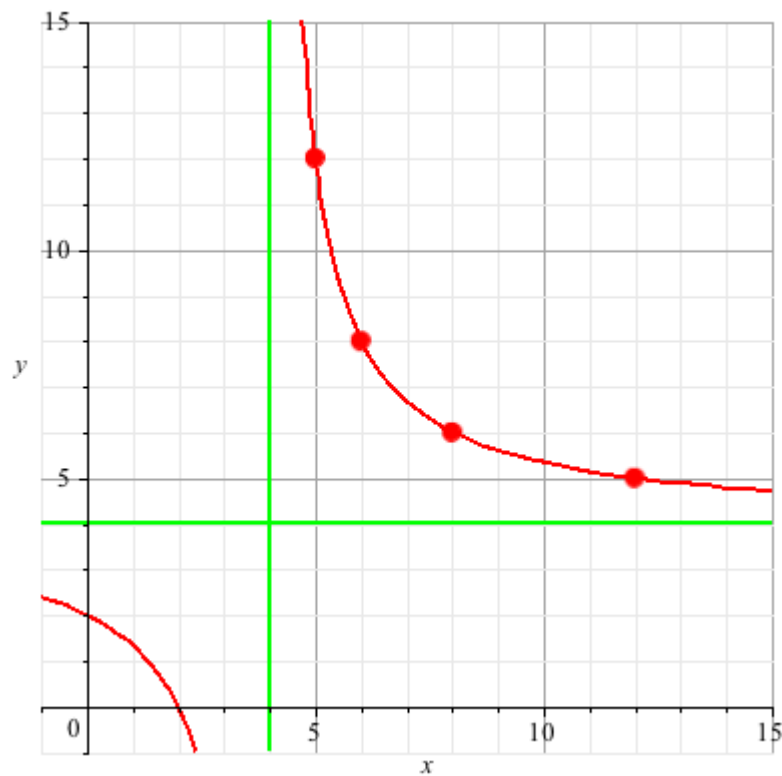
Die Ecken der Puzzleteile der Abbildungen 1 bis 5 liegen auf einem Quadratraster. Das Abzählproblem kann daher so formuliert werden: Gesucht ist ein aus Quadraten zusammengesetztes Rechteck mit gleich vielen Rand- wie Binnenquadraten. Wir setzen die Maschenweite des Quadratrasters 1.

##### 4.1 Hyperbel

Mit  $x$  bezeichnen wir die Länge und mit  $y$  die Breite des gesuchten Rechteckes. Dabei ist  $x > 2$  und  $y > 2$ . Die Bedingung lautet nun:

$$\frac{1}{2}xy = (x-2)(y-2) \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes (Abb. 6). Es handelt sich um eine Hyperbel. In der Abbildung 6 sind grün die Asymptoten eingezeichnet.



**Abb. 6: Hyperbel**

Außer den eingezeichneten Gitterpunkten gibt es offensichtlich keine weiteren Lösungen. Die Gitterpunkte  $(8,6)$  und  $(12,5)$  entsprechen den Beispielen der Abbildungen 4 und 5.

#### 4.2 Die Tschirnhaus-Transformation

Wir denken uns ein zusätzliches  $u,v$ -Koordinatensystem mit den Asymptoten der Hyperbel als Koordinatenachsen. Es ist also:

$$u = x - 4, \quad v = y - 4 \quad (3)$$

Wir setzen nun

$$x = u + 4, \quad y = v + 4 \quad (4)$$

in (2) ein und erhalten:

$$uv = 8 \quad (5)$$

Wir müssen also 8 in zwei Faktoren zerlegen. Die einzigen Lösungen sind:

$$u = 4, v = 2 \quad \text{und} \quad u = 8, v = 1 \quad (6)$$

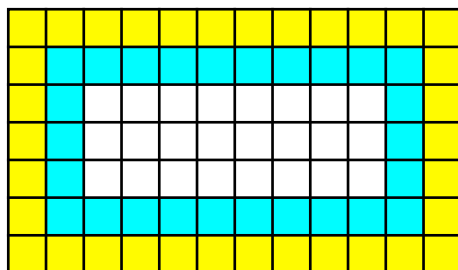
Wegen (4) ergeben sich die schon bekannten Lösungen.

Die Tschirnhaus-Transformation gestattet, in einem Ausdruck zweiten Grades die linearen Terme zu eliminieren. Ein Sonderfall ist die in der Schule bei quadratischen Gleichungen besprochene „quadratische Ergänzung“.

Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, 1651-1708.

### 4.3 Der Binnenrand

Im Beispiel der Abbildung 7 sind die Randquadrate gelb eingezeichnet. Die Binnenrandquadrate, also die Randquadrate des Binnenrechteckes, sind hellblau markiert.



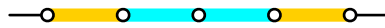
**Abb. 7: Binnenrand**

Wir sehen, dass der hellblaue Binnenrand im Vergleich zum gelben Außenrand an jeder Ecke zwei Einheitsquadrate weniger hat. Dieser Verlust von insgesamt 8 Einheitsquadraten muss durch den weißen Teil des Binnenrechteckes ausgeglichen werden. Damit sind wir wieder gleich weit wie bei (5). Die Idee des Binnenrandes illustriert aber den Grundgedanken der Tschirnhaus-Transformation.

## 5 Andere Dimensionen

### 5.1 Eindimensional

Auf der Geraden gibt es nur eine Lösung, die Strecke der Länge 4 (Abb. 8).



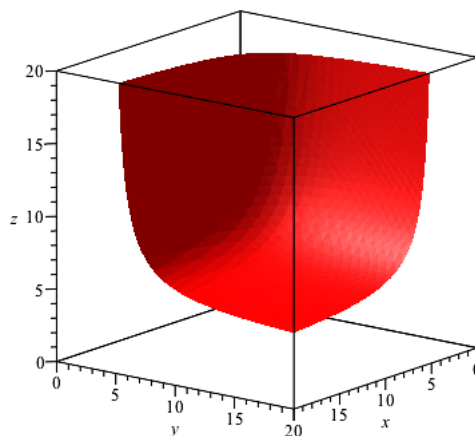
**Abb. 8: Auf der Geraden**

### 5.2 Im Raum

Im Raum haben wir die Bedingung:

$$\frac{1}{2}xyz = (x-2)(y-2)(z-2) \quad (7)$$

Zusätzlich ist  $x > 2$ ,  $y > 2$  und  $z > 2$ . Die Gleichung (7) beschreibt eine Fläche dritten Grades (Abb. 9).



**Abb. 9: Fläche dritten Grades**

Auf dieser Fläche müssten wir nun die Gitterpunkte finden.

Dazu machen wir einen brute force approach für  $2 < x < y < z < 300$ . Wir erhalten die Werte der Tabelle 1.



Nr.	$x$	$y$	$z$
1	5	13	132
2	5	14	72
3	5	15	52
4	5	16	42
5	5	17	36
6	5	18	32
7	5	20	27
8	5	22	24
9	6	9	56
10	6	10	32
11	6	11	24
12	6	12	20
13	6	14	16
14	7	7	100
15	7	8	30
16	7	9	20
17	7	10	16
18	8	8	18
19	8	9	14
20	8	10	12

Tab. 1: Werte im Raum

Neckisch ist das quadratische Prisma (Nr. 14) mit der Quadratseite 7 und der Höhe 100. Natürlich müssen wir noch nachweisen, dass dies (bis auf die Reihenfolge der Koordinaten) alle Lösungen sind.

Der Autor hat keine weiteren Beispiele gefunden, kann aber nicht ausschließen, dass es weitere Beispiele gibt.

Die Tschirnhaus-Transformation

$$x = u + 4, \quad y = v + 4, \quad z = w + 4 \quad (8)$$

liefert aus (7):

$$uvw = 8u + 8v + 8w + 48 \quad (9)$$

Es fallen zwar die quadratischen Summanden weg, nicht aber die linearen. Diese linearen Terme haben mit den Binnenkanten des Binnenquaders im Vergleich zu den Kanten des gesamten Quaders zu tun.

### 5.3 Im 4d-Raum

Wir testen die Bedingung (die Variable  $w$  hat hier nichts mit der Tschirnhaus-Transformation zu tun):

$$\frac{1}{2}wxyz = (w-2)(x-2)(y-2)(z-2) \quad (10)$$

Allein schon für  $2 < w < x < y < z < 30$  ergeben sich 26 Lösungen (Tab. 2). Für größere Bereiche gibt es viel mehr Lösungen.

Nr.	$w$	$x$	$y$	$z$
1	6	16	26	28
2	6	20	20	27
3	6	20	22	24
4	7	11	24	30
5	7	12	20	30
6	7	12	23	25
7	7	14	16	30
8	7	15	16	26
9	7	16	18	20
10	8	9	26	28
11	8	10	20	27
12	8	10	22	24
13	8	11	18	24
14	8	12	14	30
15	8	12	15	26
16	8	12	18	20
17	8	13	15	22
18	8	14	16	18
19	9	11	13	28
20	9	11	14	24
21	9	12	14	20
22	9	14	14	16
23	10	11	12	24
24	10	12	12	20
25	10	12	14	16
26	11	12	13	15

**Tab. 2: Im 4d-Raum**

Im 5d-Raum scheint es noch mehr Lösungen zu geben.