Hans Walser, [20160505]

Potenzen der Fibonacci-Zahlen

0 Worum es geht

Es werden die Folgen der Potenzen der Fibonacci-Zahlen bezüglich Rekursion und expliziter Formel untersucht. Mitteilung von Ergebnissen.

1 Die Fibonacci-Folge

Wir arbeiten mit der verallgemeinerten Fibonacci-Folge a_n mit den Startwerten

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \tag{1}$$

und der Rekursion:

$$a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1} \tag{2}$$

Für $p = 1$ und $q = 1$ ergibt sich die übliche Fibonacci-Folge.

Für unseren allgemeinen Fall erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_1 &= 1 \\
a_2 &= p \\
a_3 &= p^2 + q \\
a_4 &= p^3 + 2pq \\
a_5 &= p^4 + 3p^2q + q^2 \\
a_6 &= p^5 + 4p^3q + 3pq^2 \\
a_7 &= p^6 + 5p^4q + 6p^2q^2 + q^3 \\
a_8 &= p^7 + 6p^5q + 10p^3q^2 + 4pq^3 \\
a_9 &= p^8 + 7p^6q + 15p^4q^2 + 10p^2q^3 + q^4 \\
a_{10} &= p^9 + 8p^7q + 21p^5q^2 + 20p^3q^3 + 5pq^4
\end{aligned} \tag{3}$$

Das Koeffizientendreieck ist ein affin verzerrtes Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten. Die Spalten sind schrittweise je um eine Zeile nach unten verschoben.

Die Zeilensummen sind die gewöhnlichen Fibonacci-Zahlen.

Die Koeffizienten bei a_3 passen entsprechend ins Pascal-Dreieck.

Die Koeffizienten bei a_4 sind in umgekehrter Reihenfolge die Anzahlen der Bauteile einer Strecke (2 Punkte, 1 Strecke).
Die Folge hat die explizite Darstellung:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}}\left(\left(\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+4q}\right)-\left(\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+4q}\right)\right) \qquad (4)$$

2 Quadrate der Fibonacci-Zahlen

Es sei:

$$b_n = a_n^2 \qquad (5)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0\\
b_1 &= 1\\
b_2 &= p^2\\
b_3 &= p^4+2p^2q+q^2\\
b_4 &= p^6+4p^4q+4p^2q^2\\
b_5 &= p^8+6p^6q+11p^4q^2+6p^2q^3+q^4\\
b_6 &= p^{10}+8p^8q+22p^6q^2+24p^4q^3+9p^2q^4\\
b_7 &= p^{12}+10p^{10}q+37p^8q^2+62p^6q^3+46p^4q^4+12p^2q^5+q^6\\
b_8 &= p^{14}+12p^{12}q+56p^{10}q^2+128p^8q^3+148p^6q^4+80p^4q^5+16p^2q^6
\end{aligned} \qquad (6)$$

Die Koeffizienten bei b_3 passen entsprechend ins Pascal-Dreieck.
Die Koeffizienten bei b_4 sind in umgekehrter Reihenfolge die Anzahlen der Bauteile eines Quadrates (4 Ecken, 4 Kanten, 1 Quadrat).
Die Folge b_n hat die Rekursion:

$$b_{n+1} = (p^2+q)b_n + (p^2q+q^2)b_{n-1} - q^3 b_{n-2} \qquad (7)$$

Wir benötigen also drei Startwerte.
Für die explizite Formel finden wir:

$$b_n = \frac{1}{p^2+4q}\left(\left(\tfrac{1}{2}p^2+q+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^4+4p^2q}\right)^n+\left(\tfrac{1}{2}p^2+q-\tfrac{1}{2}\sqrt{p^4+4p^2q}\right)^n-2(-q)^n\right) \quad (8)$$

3 Dritte Potenzen der Fibonacci-Zahlen

Es sei:

$$c_n = a_n^3 \quad (9)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0\\ c_1 &= 1\\ c_2 &= p^3\\ c_3 &= p^6+3p^4q+3p^2q^2+q^3\\ c_4 &= p^9+6p^7q+12p^5q^2+8p^3q^3\\ c_5 &= p^{12}+9p^{10}q+30p^8q^2+45p^6q^3+30p^4q^4+9p^2q^5+q^6\\ c_6 &= p^{15}+12p^{13}q+57p^{11}q^2+136p^9q^3+171p^7q^4+108p^5q^5+27p^3q^6 \end{aligned} \quad (10)$$

Die Koeffizienten bei c_3 passen entsprechend ins Pascal-Dreieck.
Die Koeffizienten bei c_4 sind in umgekehrter Reihenfolge die Anzahlen der Bauteile eines Würfels (8 Ecken, 12 Kanten, 6 Seitenquadrate, 1 Würfel).
Die Folge c_n hat die Rekursion:

$$c_{n+1} = (p^3+2pq)c_n+(p^4q+3p^2q^2+2q^3)c_{n-1}+\left(-p^3q^3-2pq^4\right)c_{n-2}-q^6c_{n-3} \quad (11)$$

Wir benötigen also vier Startwerte.
Für die explizite Formel finden wir:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{p^2+4q}^3} \left\{ \begin{array}{l} +\left(\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^3 \right)^n \\ -3\left(\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^2 \left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^1 \right)^n \\ +3\left(\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^1 \left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^2 \right)^n \\ -\left(\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q} \right)^3 \right)^n \end{array} \right\} \tag{12}$$

4 Vierte Potenz

Es sei:

$$d_n = a_n^4 \tag{13}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_1 &= 1 \\ d_2 &= p^4 \\ d_3 &= p^8 + 4p^6q + 6p^4q^2 + 4p^2q^3 + q^4 \\ d_4 &= p^{12} + 8p^{10}q + 24p^8q^2 + 32p^6q^3 + 16p^4q^4 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Koeffizienten bei d_3 passen entsprechend ins Pascal-Dreieck.

Die Koeffizienten bei d_4 sind in umgekehrter Reihenfolge die Anzahlen der Bauteile eines 4d-Hyperwürfels (16 Ecken, 32 Kanten, 24 Seitenquadrate, 8 Seitenwürfel, 1 Hyperwürfel).

5 Sonderfall Fibonacci-Zahlen

Wir setzen $p = 1$ und $q = 1$.

Damit erhalten wir folgendes.

5.1 Die Potenzen

Die Tabelle 1 zeigt die ersten Potenzen. Sie gibt auch die Startwerte für die Rekursionen.

n	F_n^0	F_n^1	F_n^2	F_n^3	F_n^4	F_n^5	F_n^6	F_n^7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	4	8	16	32	64	128
4	1	3	9	27	81	243	729	2187
5	1	5	25	125	625	3125	15625	78125
6	1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152
7	1	13	169	2197	28561	371293	4826809	62748517

Tab. 1: Potenzen der Fibonacci-Zahlen

5.2 Die Rekursionen

Es gelten die Rekursionen.

$$F_{n+1}^0 = F_n^0 \tag{15}$$

Jetz isch's so spot wie geschter um die Zyt.

$$F_{n+1}^1 = F_n^1 + F_{n-1}^1 \tag{16}$$

Klassische Fibonacci-Rekursion.

$$F_{n+1}^2 = 2F_n^2 + 2F_{n-1}^2 - F_{n-2}^2 \tag{17}$$

Dreigliedrige Rekursion.

$$F_{n+1}^3 = 3F_n^3 + 6F_{n-1}^3 - 3F_{n-2}^3 - F_{n-3}^3 \tag{18}$$

Viergliedrige Rekursion.

$$F_{n+1}^4 = 5F_n^4 + 15F_{n-1}^4 - 15F_{n-2}^4 - 5F_{n-3}^4 + F_{n-4}^4 \tag{19}$$

$$F_{n+1}^5 = 8F_n^5 + 40F_{n-1}^5 - 60F_{n-2}^5 - 40F_{n-3}^5 + 8F_{n-4}^5 + F_{n-5}^5 \tag{20}$$

$$F_{n+1}^6 = 13F_n^6 + 104F_{n-1}^6 - 260F_{n-2}^6 - 260F_{n-3}^6 + 104F_{n-4}^6 + 13F_{n-5}^6 - F_{n-6}^6 \tag{21}$$

$$\mathrm{F}_{n+1}^7 = 21\mathrm{F}_n^7 + 273\mathrm{F}_{n-1}^7 - 1092\mathrm{F}_{n-2}^7 - 1820\mathrm{F}_{n-3}^7 + 1092\mathrm{F}_{n-4}^7 + 273\mathrm{F}_{n-5}^7 - 21\mathrm{F}_{n-6}^7 - \mathrm{F}_{n-7}^7 \quad (22)$$

5.3 Zahlendreieck zur Rekursion

Wir schreiben die Rekursionen in der geschlossenen Form wie zum Beispiel (19) neu:

$$\mathrm{F}_{n+1}^4 - 5\mathrm{F}_n^4 - 15\mathrm{F}_{n-1}^4 + 15\mathrm{F}_{n-2}^4 + 5\mathrm{F}_{n-3}^4 - \mathrm{F}_{n-4}^4 = 0 \quad (23)$$

Damit erhalten wir auf der linken Seite ein Koeffizienten-Dreieck gemäß Abbildung 1.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad -1 \\
1 \quad -1 \quad -1 \\
1 \quad -2 \quad -2 \quad 1 \\
1 \quad -3 \quad -6 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad -5 \quad -15 \quad 15 \quad 5 \quad -1 \\
1 \quad -8 \quad -40 \quad 60 \quad 40 \quad -8 \quad -1 \\
1 \quad -13 \quad -104 \quad 260 \quad 260 \quad -104 \quad -13 \quad 1 \\
1 \quad -21 \quad -273 \quad 1092 \quad 1820 \quad -1092 \quad -273 \quad 21 \quad 1
\end{array}$$

Abb. 1: Koeffizienten-Schema

Wir nummerieren wie beim Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten (also zeilen- und schrägspaltenweise je mit null beginnend).
Für die Koeffizienten $G_{n,k}$ gilt:

$$\begin{aligned} G_{n,0} &= 1 \\ G_{n,k} &= \frac{\prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_j}{\prod_{j=1}^{k} \mathrm{F}_j \prod_{j=1}^{n-k} \mathrm{F}_j} (-1)^{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil}, \quad k > 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Das Bildungsgesetz erinnert an die Binomialkoeffizienten.
Die Abbildung 2 zeigt dasselbe Zahlen-Dreieck ohne die negativen Vorzeichen.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 6 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 15 & & 15 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 40 & & 60 & & 40 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 13 & & 104 & & 260 & & 260 & & 104 & & 13 & & 1 & \\
1 & & 21 & & 273 & & 1092 & & 1820 & & 1092 & & 273 & & 21 & & 1
\end{array}
$$

Abb. 2: Zahlendreieck ohne Vorzeichen

Für diese Zahlen $H_{n,k}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&H_{n,0} = 1 \\
&H_{n,k} = \frac{\prod_{j=1}^{n} \mathrm{F}_j}{\prod_{j=1}^{k} \mathrm{F}_j \prod_{j=1}^{n-k} \mathrm{F}_j}, \quad k > 0
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Weiter gilt die Rekursion:

$$
H_{n,k} = H_{n-1,k-1}\mathrm{F}_{n-k+1} + H_{n-1,k}\mathrm{F}_{k-1} \tag{26}
$$

5.4 Die expliziten Formeln

In den expliziten Formeln erscheint der Goldene Schnitt. Wir verwenden dazu die Schreibweise:

$$
\Phi = \tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1.618 \tag{27}
$$

Es ist:

$$\mathrm{F}_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\tfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^n - \left(\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^n\right) = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right) \tag{28}$$

$$\mathrm{F}_n^2 = \tfrac{1}{5}\left((1+\Phi)^n - 2(-1)^n + \left(1-\tfrac{1}{\Phi}\right)^n\right) \tag{29}$$

$$\mathrm{F}_n^3 = \tfrac{1}{5\sqrt{5}}\left((1+2\Phi)^n - 3(-\Phi)^n + 3\left(\tfrac{1}{\Phi}\right)^n - \left(1-\tfrac{2}{\Phi}\right)^n\right) \tag{30}$$

$$\mathrm{F}_n^4 = \tfrac{1}{25}\left((2+3\Phi)^n - 4(-1-\Phi)^n + 6 - 4\left(-1+\tfrac{1}{\Phi}\right)^n + \left(2-\tfrac{3}{\Phi}\right)^n\right) \tag{31}$$

5.5 Wurzeln von Gleichungen

Wir bauen aus den rekursiven Formeln Gleichungen in x und berechnen deren Wurzeln. Aus (15) machen wir:

$$x = 1 \tag{32}$$

Die Lösung ist nicht weiter interessant:

$$x_1 = 1 \tag{33}$$

Aus (16) machen wir:

$$x^2 = x + 1 \tag{34}$$

Wir haben die beiden Lösungen:

$$x_1 = \Phi, \quad x_2 = -\tfrac{1}{\Phi} \tag{35}$$

Das sind die beiden Basen in der expliziten Formel (28).
Aus (17) machen wir die kubische Gleichung:

$$x^3 = 2x^2 + 2x - 1 \tag{36}$$

Diese kubische Gleichung hat die drei Lösungen:

$$x_1 = 1 + \Phi, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1 - \tfrac{1}{\Phi} \tag{37}$$

Das sind die drei Basen in der expliziten Formel (29).
Aus (18) machen wir die Gleichung vierten Grades:

$$x^4 = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 1 \tag{38}$$

Diese hat die vier Lösungen:

$$x_1 = 1 + 2\Phi, \quad x_2 = -\Phi, \quad x_3 = \tfrac{1}{\Phi}, \quad x_4 = 1 - \tfrac{2}{\Phi} \tag{39}$$

Das sind die vier Basen in der expliziten Formel (30).
Aus (19) machen wir die Gleichung fünften Grades:

$$x^5 = 5x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 5x + 1 \tag{40}$$

Diese hat die fünf Lösungen:

$$x_1 = 2 + 3\Phi, \quad x_2 = -1 - \Phi, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1 - \tfrac{1}{\Phi}, \quad x_5 = 2 - \tfrac{3}{\Phi} \tag{41}$$

Das sind die fünf Basen in der expliziten Formel (31).
Wir sehen, wie der Hase läuft.

5.6 Funktionsgrafen

Wir definieren die Funktionen:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 1 \\
f_1(x) &= x-1 \\
f_2(x) &= x^2-x-1 \\
f_3(x) &= x^3-2x^2-2x+1 \\
f_4(x) &= x^4-3x^3-6x^2+3x+1 \\
f_5(x) &= x^5-5x^4-15x^3+15x^2+5x-1
\end{aligned} \tag{42}$$

Die Koeffizienten sind dem Schema der Abbildung 1 entnommen. Für diese Funktionen erhalten wie die Funktionsgrafen der Abbildung 3.

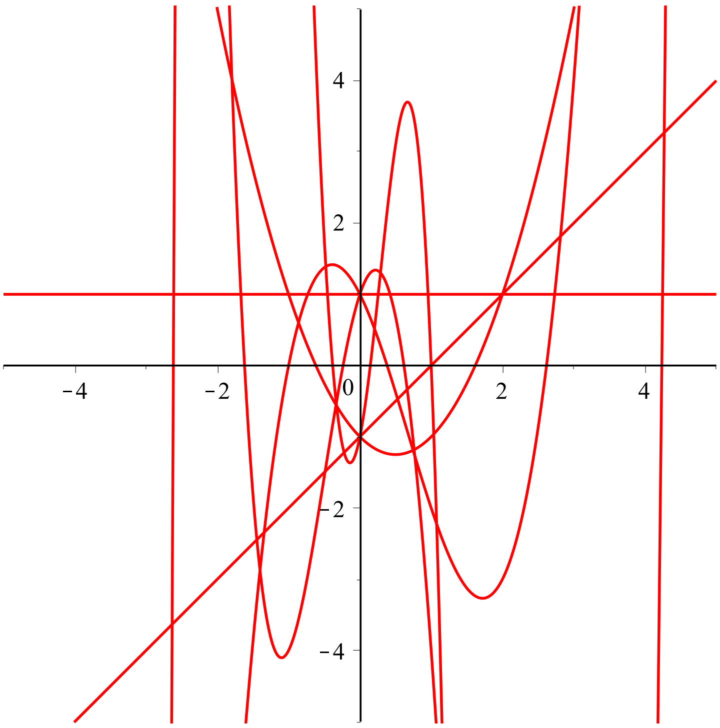

Abb. 3: Funktionsgrafen

Wir erkennen einige Schnittpunkte von jeweils drei Kurven.