Hans Walser, [20191211]

Pascal und Fibonacci

1 Worum geht es?

Verallgemeinerte Fibonacci-Folgen auf der Basis von Potenzen der Pascal-Matrix.

2 Erinnerungen

Wenn wir im Pascal-Dreieck der Binomialkoeffizienten die Schrägzeilensummen bilden gemäß Abbildung 1 erhalten wir die Fibonacci-Zahlen.

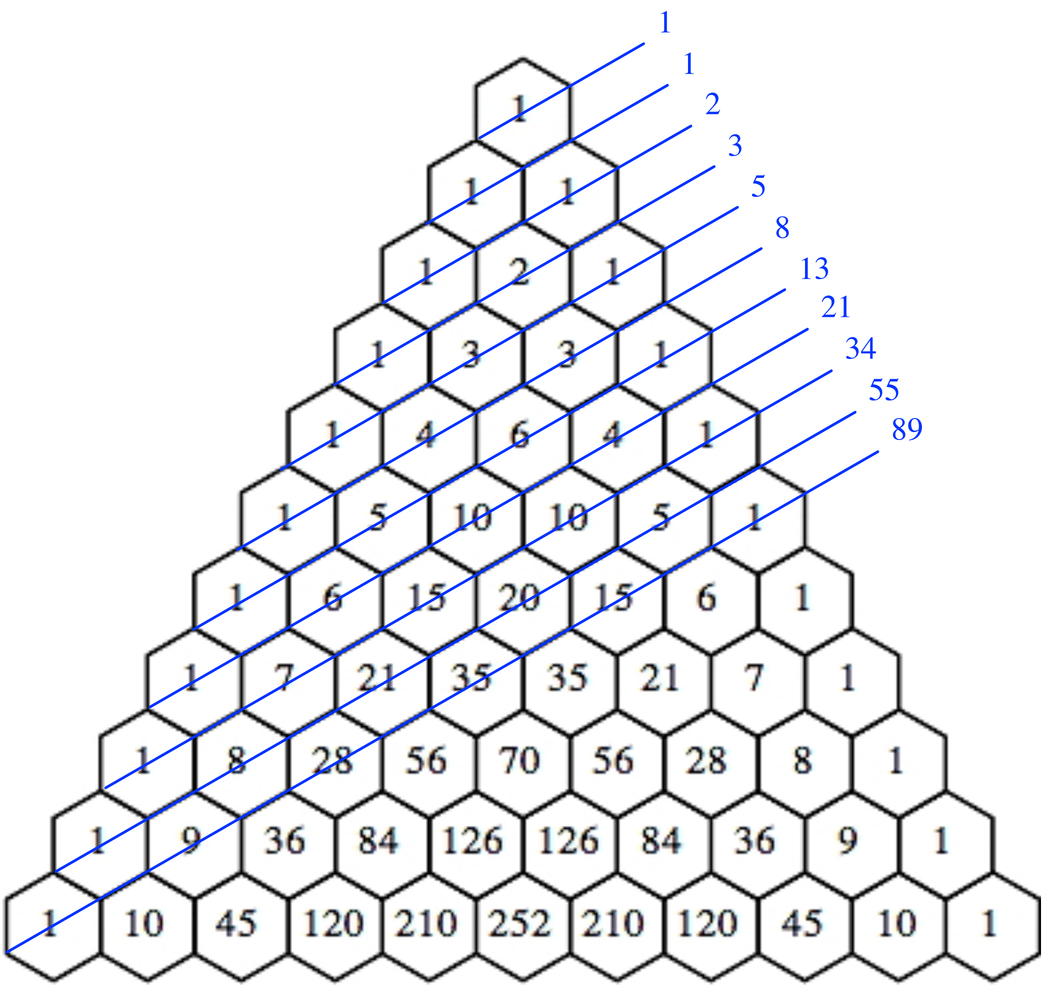

Abb. 1: Schrägzeilensummen

Die Fibonacci-Zahlen F_n haben mit den Startwerten $F_1 = 1, F_2 = 1$ die Rekursion:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \tag{1}$$

Weiter gilt der Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \tag{2}$$

Der Grenzwert ist der Goldene Schnitt (Walser 2013). Er ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = x + 1 \tag{3}$$

3 Pascal-Matrix

Das Pascal-Dreieck kann auch in eine Dreiecksmatrix eingekastelt werden (Abb. 2).

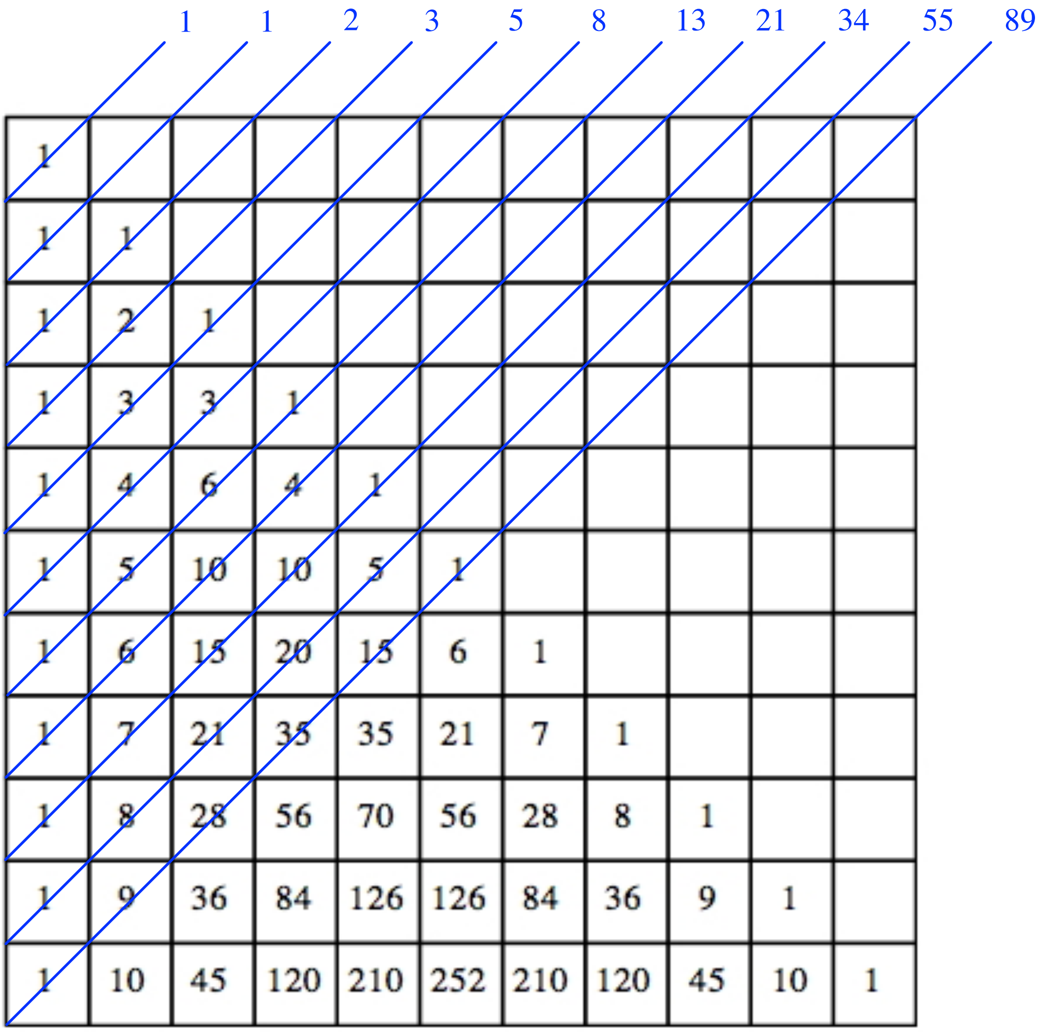

Abb. 2: Pascal-Matrix

Die Schrägzeilen erscheinen jetzt als Diagonalen.

4 Quadrat der Pascal-Matrix

Wir multiplizieren die Pascal-Matrix mit sich selbst im Sinne der Matrizenmultiplikation. Das Resultat ist wieder eine Dreiecksmatrix (Abb. 3).

1									
2	1								
4	4	1							
8	12	6	1						
16	32	24	8	1					
32	80	80	40	10	1				
64	192	240	160	60	12	1			
128	448	672	560	280	84	14	1		
256	1024	1792	1792	1120	448	112	16	1	
512	2304	4608	5376	4032	2016	672	144	18	1

Abb. 3: Quadrat der Pascal-Matrix

Die Folge der Schrägzeilensummen ist:

1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378

Die Folge hat mit den Startwerten $a_1 = 1, a_2 = 2$ die Rekursion:

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \tag{4}$$

Weiter ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414 \tag{5}$$

Dies ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = 2x + 1 \tag{6}$$

5 Dritte Potenz der Pascal-Matrix

Für die dritte Potenz der Pascal-Matrix erhalten wir (Abb. 4):

1									
3	1								
9	6	1							
27	27	9	1						
81	108	54	12	1					
243	405	270	90	15	1				
729	1458	1215	540	135	18	1			
2187	5103	5103	2835	945	189	21	1		
6561	17496	20412	13608	5670	1512	252	24	1	
19683	59049	78732	61236	30618	10206	2268	324	27	1

Abb. 4: Dritte Potenz der Pascal-Matrix

Die Folge der Schrägzeilensummen ist:

1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837

Die Folge hat mit den Startwerten $a_1 = 1, a_2 = 3$ die Rekursion:

$$a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1} \tag{7}$$

Weiter ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.303 \tag{8}$$

Dies ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = 3x + 1 \tag{9}$$

6 Allgemein

Für die n-te Potenz der Pascal-Matrix ergibt sich die Schrägzeilen-Summenfolge mit den Startwerten $a_1 = 1, a_2 = n$ und der Rekursion:

$$a_{n+1} = na_n + a_{n-1} \tag{10}$$

Weiter ist:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \tag{11}$$

Dies ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 = nx + 1 \tag{12}$$

7 Inverse

Für die Inverse der Pascal-Matrix erhalten wir (Abb. 5):

1									
−1	1								
1	−2	1							
−1	3	−3	1						
1	−4	6	−4	1					
−1	5	−10	10	−5	1				
1	−6	15	−20	15	−6	1			
−1	7	−21	35	−35	21	−7	1		
1	−8	28	−56	70	−56	28	−8	1	
−1	9	−36	84	−126	126	−84	36	−9	1

Abb. 5: Inverse der Pascal-Matrix

Dies ist die Pascal-Matrix mit alternierenden Vorzeichen. Die Schrägzeilensummen haben daher bei gleichen Beträgen ebenfalls alternierende Vorzeichen. Analoges gilt für weitere Potenzen mit negativen Exponenten.

Literatur

Walser, H. (2013): *Der Goldene Schnitt*. 6., bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Beitrag von Hans Wußing über populärwissenschaftliche Mathematikliteratur aus Leipzig. Leipzig: EAGLE, Edition am Gutenbergplatz. ISBN 978-3-937219-85-1.