Hans Walser, [20191105]

Parität

Anregung: Satz von Eddy

1 Worum geht es?

Geometrisches Problem zum Thema Parität.

2 Problemstellung

Ist folgende Aussage wahr?

Jede Gerade durch den Schwerpunkt eines regelmäßigen n-Eckes halbiert dieses flächenmäßig.

3 Antwort

Richtig für gerades n, falsch für ungerades n.

4 Bearbeitung

4.1 Gerades n

Punktsymmetrie. Die beiden Teile sind nicht nur flächenmäßig gleich groß, sondern sogar kongruent.

4.2 Ungerades n

Zunächst ein exemplarisches Gegenbeispiel. Wir unterteilen ein gleichseitiges Dreieck in 9 kongruente Teildreiecke (Abb. 1). Die senkrechte Symmetrieachse halbiert das Dreieck flächenmäßig. Bei der waagerechten Geraden durch den Schwerpunkt haben wir oben vier Teile und unten fünf Teile.

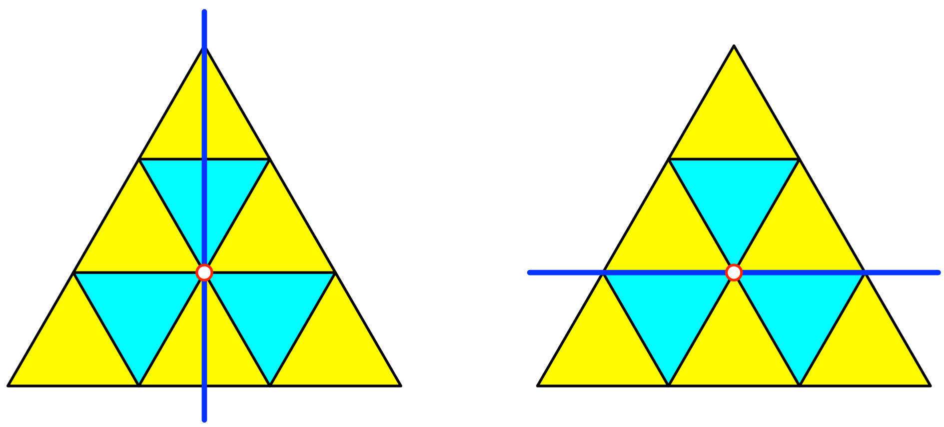

Abb. 1: Gleichseitiges Dreieck

Nun zur allgemeinen Situation mit ungerader Eckenzahl. Die Abbildung 2 zeigt zwar die Situation für das regelmäßige Fünfeck, die Überlegungen dazu gelten aber für alle regelmäßigen Vielecke ungerader Eckenzahl $u > 1$.

Wir setzen das Vieleck bodenständig, das heißt mit einer horizontalen Seite unten und einer Spitze oben.

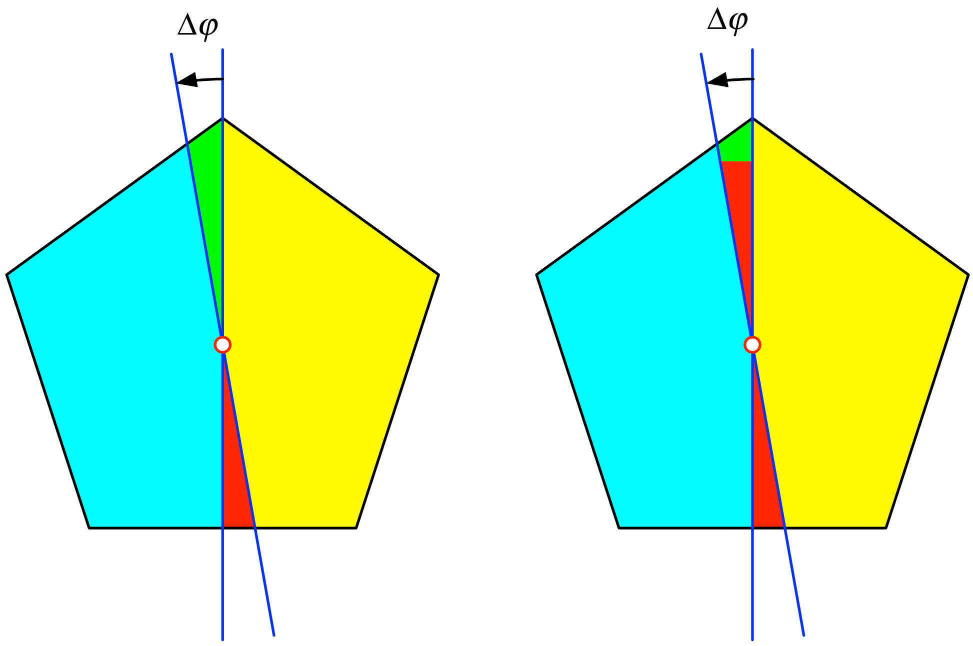

Abb. 2: Ungerade Eckenzahl

Die Symmetrieachse durch die Spitze halbiert das Vieleck flächenmäßig (Axialsymmetrie). Die Hälfte rechts von der Symmetrieachse färben wir gelb. Nun drehen wir diese Symmetrieachse um den Schwerpunkt um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi \leq \frac{180°}{u}$. Die gelbe Fläche wird um das grüne Stück (oben) größer und um das rote Stück (unten) kleiner. Da das rote Stück kleiner ist als das grüne Stück, haben wir auf der gelben Seite einen Nettozuwachs und auf der anderen Seite einen entsprechenden Verlust. Die gedrehte Gerade halbiert also das Vieleck nicht mehr.

Hintergrund: Ein regelmäßiges Vieleck gerader Eckenzahl ist punktsymmetrisch (wie die Gerade), bei ungerader Eckenzahl haben wir keine Punktsymmetrie.

5 Erweiterung

5.1 Die *k*-Spinne

Unter der k-Spinne verstehen wir eine Figur aus $k > 1$ vom selben Punkt (Zentrum) ausgehenden Strahlen, welche regelmäßige Winkel $\frac{360°}{k}$ einschließen (Abb. 3).

Für $k = 2$ erhalten wir die punktierte Gerade, für $k = 3$ den Mercedes-Stern, für $k = 4$ das orthogonale Kreuz.

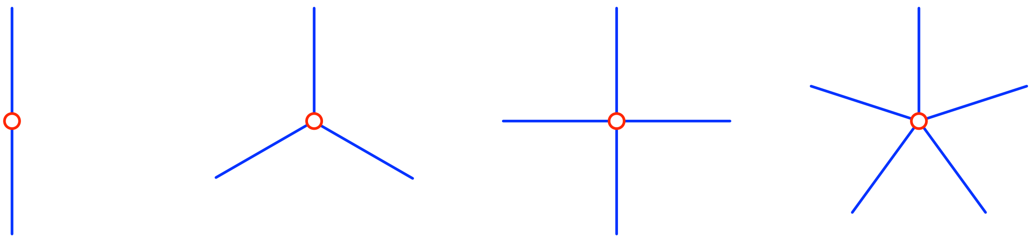

Abb. 3: *k*-Spinnen

5.2 Regelmäßiges Vieleck und Spinne

Wir setzen nun das Zentrum einer k-Spinne in den Schwerpunkt eines regelmäßigen n-Eckes.

Es gilt:

Genau wenn $k \leq n$ ein Teiler von n ist, zerlegt zu diesem k jede k-Spinne das regelmäßige n-Eck in k flächengleiche (sogar kongruente) Teile.

Beweis im Prinzip analog zu oben. Statt mit Punktsymmetrien müssen wir mit Drehsymmetrien arbeiten.

Die Abbildung 4 zeigt eine 3-Spinne, die ein regelmäßiges Hexagon in drei kongruente Teile zerlegt.

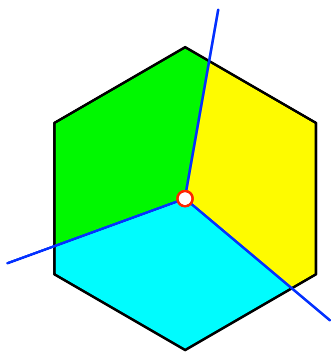

Abb. 4: Hexagonzerlegung

Noch offen ist die Frage, was geschieht, wenn $n < k$ ist, aber n ein Teiler von k.
Dazu Gegenbeispiele.
Für $n = 3$ und $k = 6$ (Abb. 5) gibt es zwar einen symmetrischen Fall mit Zerlegung in 6 kongruente Teile. Verdrehen der 6-Spinne führt aber zu Zerlegungen mit nicht kongruenten Teilen.

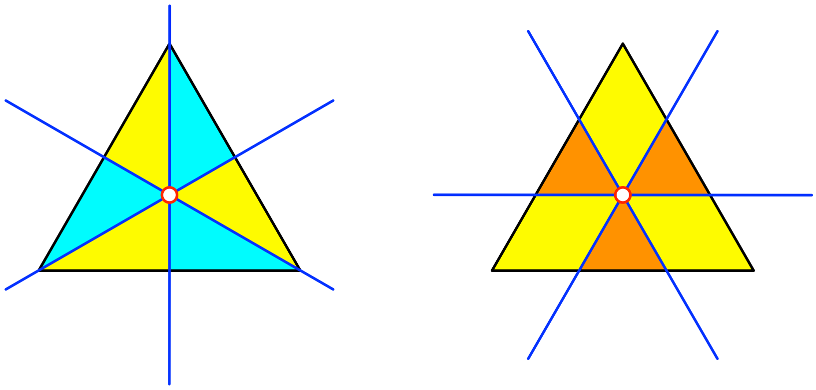

Abb. 5: Zerlegung in kongruente Teile und in nicht kongruente Teile

Für $n = 3$ und $k = 9$ gibt es keine Zerlegung in 9 kongruente Teile (Abb. 6).

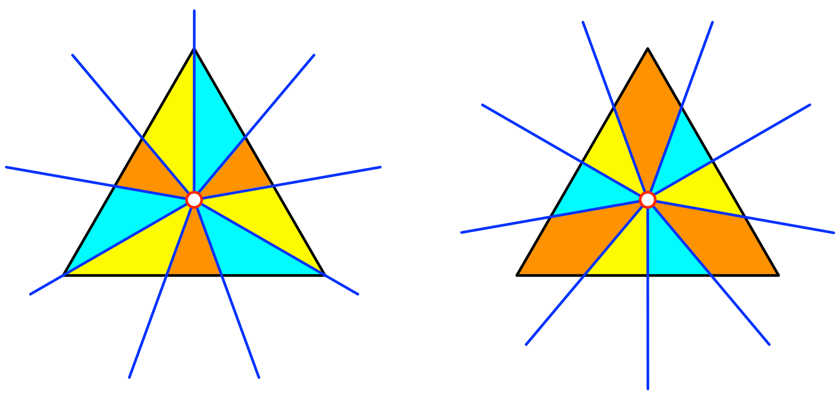

Abb. 6: Keine Zerlegung in kongruente Teile

Websites

Hans Walser: Eddy
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Eddy/Eddy.htm
Hans Walser: Eddy
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Eddy2/index.html