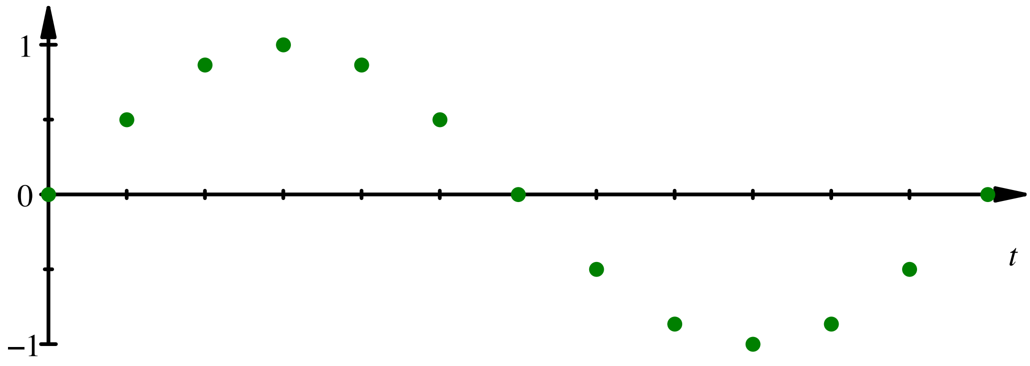
Hans Walser, [20090412a]

Ostereier suchen

1 Beispiel

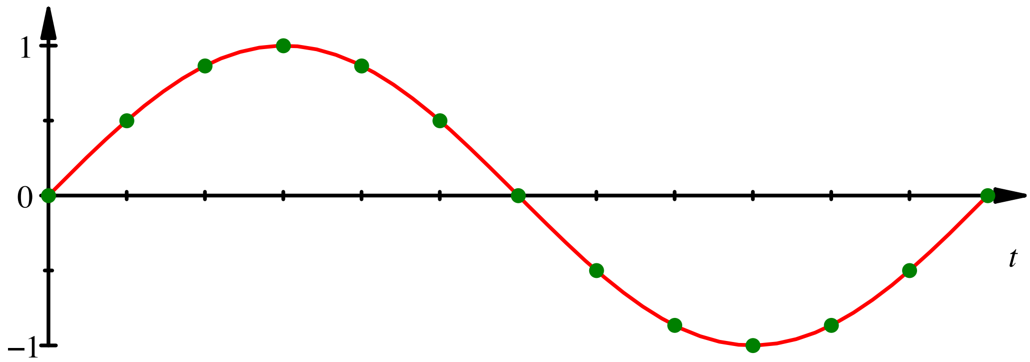
Welche Funktion passt zu den gezeichneten Punkten?



Passende Funktion?

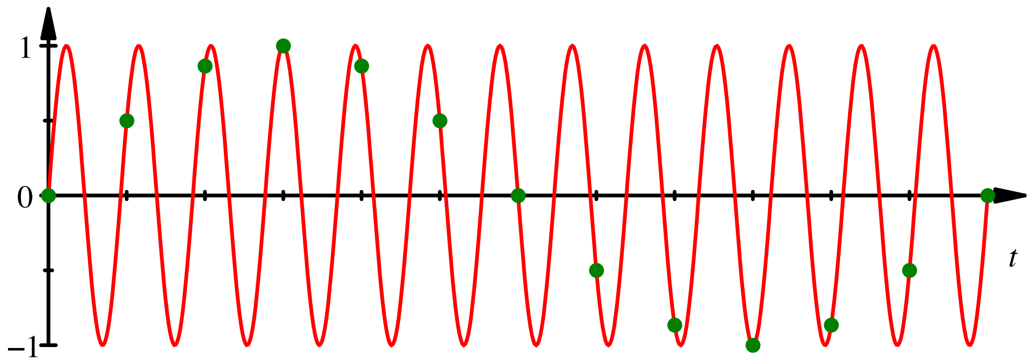
Bearbeitung

Natürlich denken wir sofort an die Sinusfunktion $y = \sin(t)$.

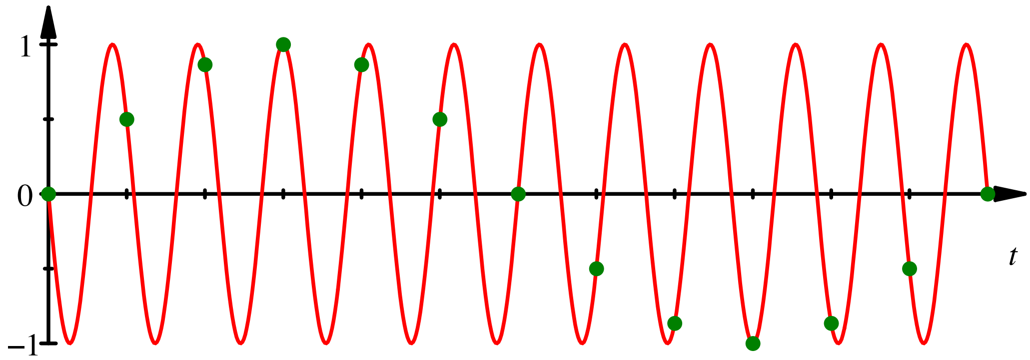


$y = \sin(t)$

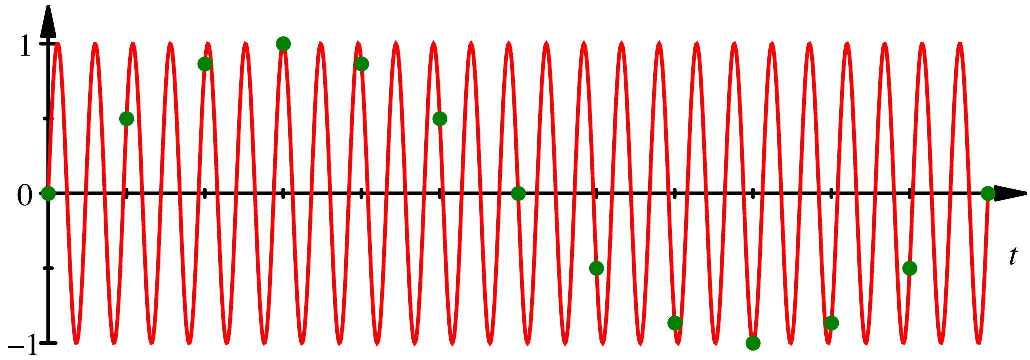
Es gibt aber auch andere Lösungen. Beispiele:



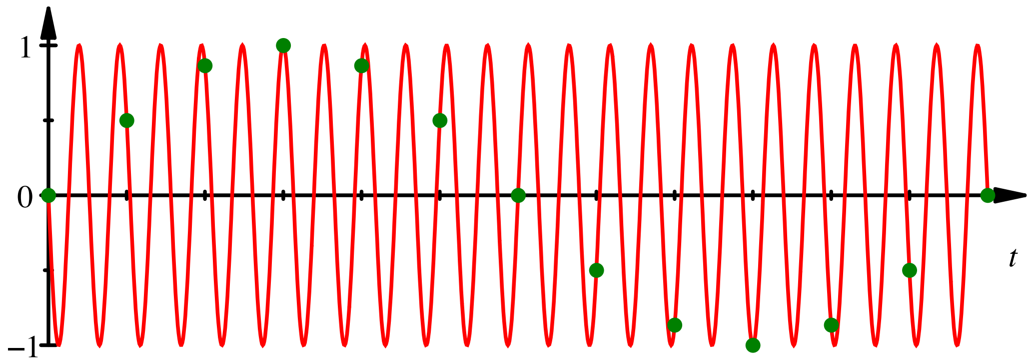
$y = \sin(13t)$



$y = \sin(-11t)$



$y = \sin(25t)$



$y = \sin(-23t)$

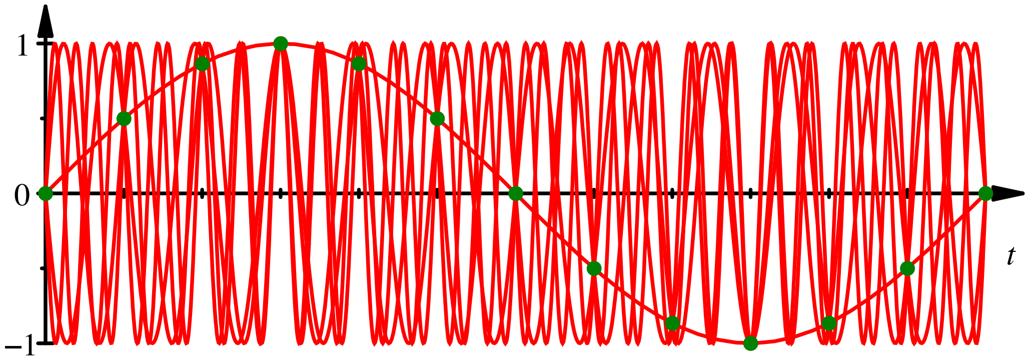
Allgemein passt $y = f_j(t) = \sin\big((12j+1)t\big),\ j \in \mathbb{Z}$.

Begründung: Die grünen Punkte sind horizontal in gleichen Abständen gezeichnet, also bei $t_k = k\frac{\pi}{6},\ k \in \{0, 1, \ldots, 12\}$. Nun ist:

$$y = f_j(t_k) = \sin\big((12j+1)t_k\big) = \sin\left((12j+1)k\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi jk + k\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(k\tfrac{\pi}{6}\right)$$

Sämtliche Graphen der Funktionen $y = f_j(t)$ verlaufen also durch die Punkte $\left(k\frac{\pi}{6}, \sin\left(k\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

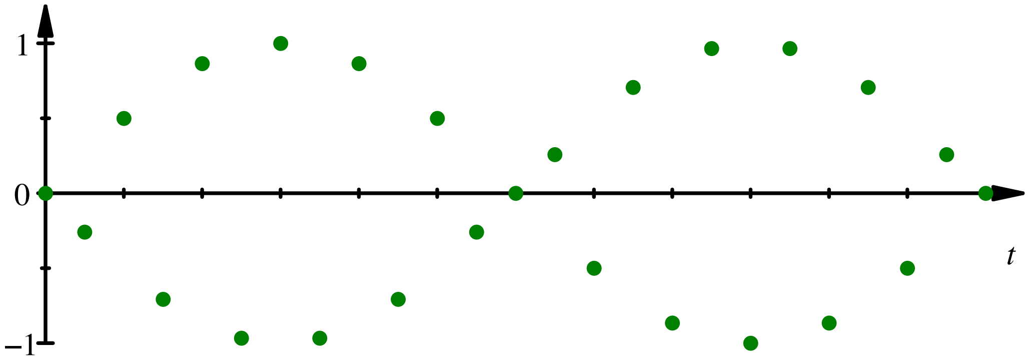
Im folgenden eine Überlagerung der obigen Lösungen.



Überlagerung

2 Beispiel

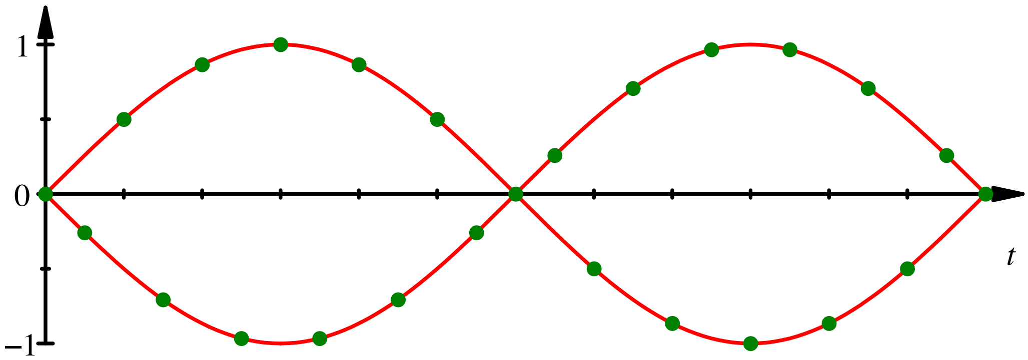
Welche Funktion passt zu den gezeichneten Punkten?



Passende Funktion

Bearbeitung

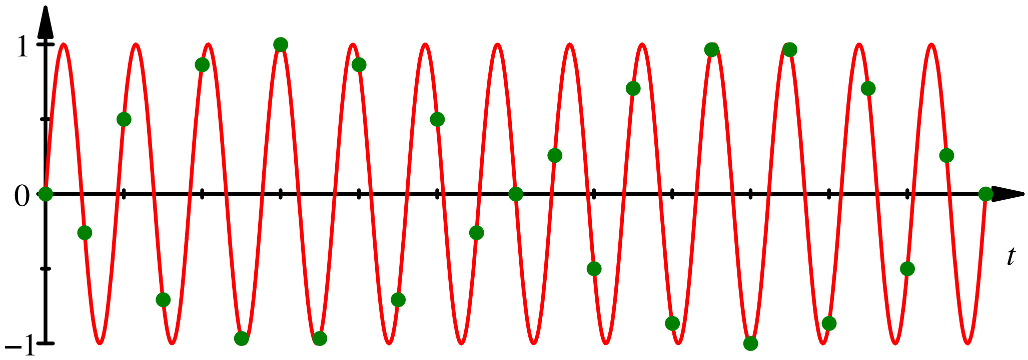
Natürlich denken wir sofort an $y = \pm\sin(t)$. Da sind wir aber auf dem falschen Hocker, denn das ist keine Funktion, da zu gegebenem *t*-Wert der *y*-Wert nicht eindeutig zugeordnet ist.



Falsche Idee: $y = \pm\sin(t)$

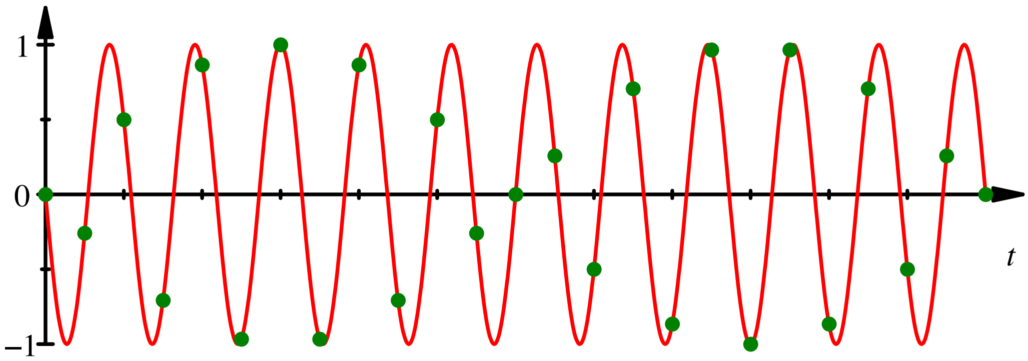
Geht es also nicht?

Die folgende Figur zeigt eine korrekte Lösung.

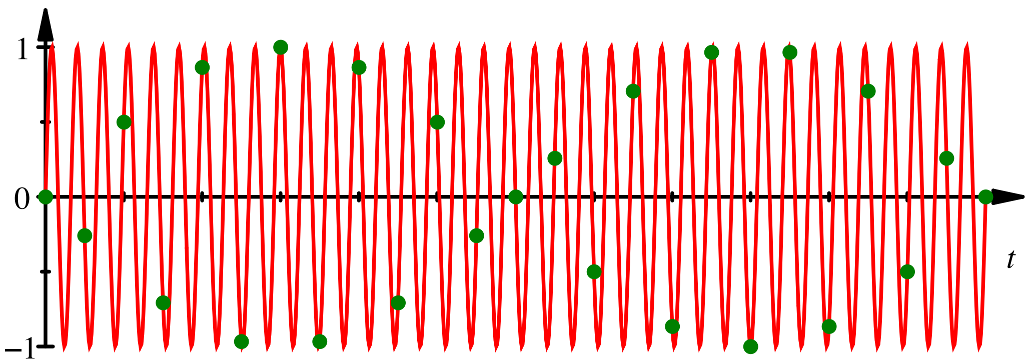


$y = \sin(13t)$

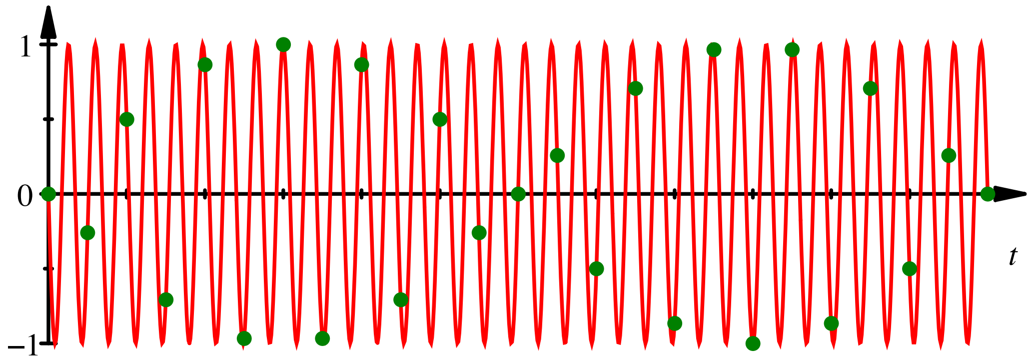
Es gibt noch andere korrekte Lösungen:



$y = \sin(-11t)$



$y = \sin(37t)$



$y = \sin(-35t)$

Allgemeine Lösung: $y = \sin\left((24j+13)t\right),\ j \in \mathbb{Z}$.

Begründung: Die grünen Punkte sind horizontal in gleichen Abständen gezeichnet, nämlich bei $t_k = k\frac{\pi}{12},\ k \in \{0, 1, \ldots, 24\}$. Nun ist:

$$y = f_j(t_k) = \sin\left((24j+13)t_k\right) = \sin\left((24j+13)k\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2\pi jk + 13k\tfrac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\left(13k\tfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(k\pi + k\tfrac{\pi}{12}\right) = \begin{cases} \sin\left(k\tfrac{\pi}{12}\right) \text{ falls } k \text{ gerade} \\ -\sin\left(k\tfrac{\pi}{12}\right) \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die grünen Punkte liegen also abwechslungsweise auf $y = \sin(t)$ und $y = -\sin(t)$.