Hans Walser, [20200425]

Magische Quadrate

Idee und Anregung: Thomas Jahre, Chemnitz, Aufgabe der Woche

Serie 54 – Aufgabe 3 - Problem 639

1 Worum geht es?

Magische Quadrate der Seitenlänge 3.

2 Problemstellung

„Mit den Zahlen 1, 2, … , 9 lässt sich ja schnell ein magisches Quadrat erstellen“, sagte Mike zu Bernd. „Klar, wenn man von Spiegelung und Drehung absieht, gibt es aber auch nur eins“, erwiderte Bernd.

(1) Zu zeigen ist, dass bei der Multiplikation jeder Zahl des gefundenen Quadrates mit der selben ganzen Zahl g das so entstehende Quadrat auch magisch ist.

(2) Ist es möglich aus den Brüchen $\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{9}\right\}$ auch ein magisches Quadrat zu erstellen?

(3) Gibt es ein magisches Quadrat, welches nur Stammbrüche - also von der Form $\frac{1}{n}$ – aufweist?

3 Bearbeitung

3.1 Beispiel

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Abb. 1: Beispiel

Die magische Summe (Zeilen-, Spalten- und Diagonalensumme) ist 15.

3.2 Formal

Wir können ein magisches Quadrat der Seitenlänge 3 generieren wie folgt.

In der ersten Zeile können wir drei beliebige Zahlen x, y, z wählen. Die übrigen Felder füllen wir gemäß Abbildung 2 aus.

x	y	z
$-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}z$	$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z$	$\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{2}{3}z$
$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z$	$-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z$

Abb. 2: Formales Vorgehen

Die magische Summe ist $x+y+z$.

Im zentralen Feld steht ein Drittel der magischen Summe. Das ist auch ein Neuntel der Gesamtsumme aller vorkommenden Zahlen.

3.3 Vektorraum

Da die Formeln linear sind, ist eine Linearkombination zweier magischer Quadrate wieder ein magisches Quadrat. Wir haben einen Vektorraum. Damit ist (1) gezeigt.

Das Neutralelement des Vektorraums ist das magische Quadrat, welches aus lauter Nullen besteht.

Da wir drei freie Parameter haben, hat der Vektorraum die Dimension 3. Die Abbildung 3 zeigt eine Basis dieses Vektorraums.

1	0	0
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

0	1	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

0	0	1
$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Abb. 3: Basis des Vektorraums

Zu jedem Punkt des euklidischen Raumes gehört genau ein magisches Quadrat und umgekehrt. Wir können die drei Zahlen in der ersten Zeile als kartesische Raumkoordinaten deuten.

3.4 Drehen und Spiegeln

Die Abbildung 4 zeigt die magischen Quadrate, die sich aus dem Beispiel der Abbildung 1 durch Drehen und Spiegeln ergeben.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Abb. 4: Drehen und Spiegeln

Die zugehörigen Punkte im euklidischen Raum ergeben sich durch die jeweils erste Zeile. Die Punkte liegen alle auf der Ebene $x + y + z = 15$ (magische Summe). In einer geeigneten isometrischen Darstellung sehen wir diese Ebene unverzerrt (Abb. 5).

Die vier blauen und die vier roten Punkte bilden zwei spiegelbildliche Parallelogramme.

Weiter sehen wir zwei Rechtecke. Das eine ist doppelt so breit aber nur halb so lang wie das andere. Die beiden Rechtecke haben daher den gleichen Flächeninhalt.

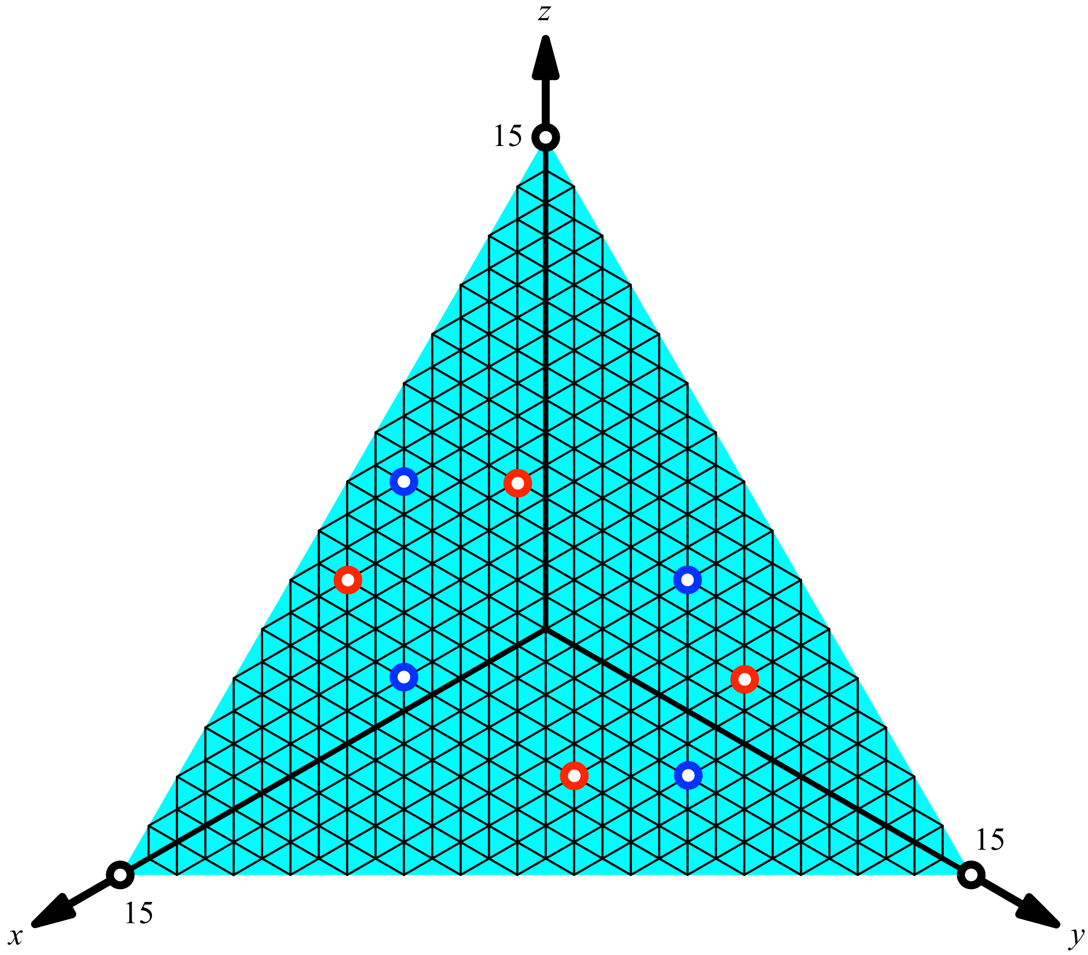

Abb. 5: Die acht magischen Quadrate

3.5 Kehrwerte

Aus den Brüchen $\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{9}\right\}$ lässt sich kein magisches Quadrat bauen.

Begründung: Die Zahl im zentralen Feld wäre:

$$\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k} = \frac{1}{9}\cdot\frac{7129}{2520} = \frac{7129}{22680} \tag{1}$$

Dies ist kein Element aus $\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{9}\right\}$. Damit ist (2) widerlegt.

Wenn wir die Zahlen des Beispiels der Abbildung 1 dividieren durch das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen, erhalten wir das magische Quadrat der Abbildung 6.

Es besteht aus lauter Stammbrüchen. Die magische Summe ist $\frac{1}{168}$, also ebenfalls ein Stammbruch.

$\frac{1}{1260}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{420}$
$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{2520}$
$\frac{1}{630}$	$\frac{1}{840}$	$\frac{1}{315}$

Abb. 6: Magisches Quadrat aus Stammbrüchen.

3.6 Standardisierung

Die Abbildung 7 zeigt ein magisches Quadrat mit den ganzen Zahlen –4, –3, ... , 3, 4. Es entsteht aus dem magischen Quadrat der Abbildung 1 durch Subtraktion von 5.

Die magische Summe ist null.

−3	2	1
4	0	−4
−1	−2	3

Abb. 7: Standardisierte Version

Symmetrien sind offensichtlich.

3.7 Magisches Produkt

Die Abbildung 8 zeigt ein Quadrat, bei dem die Zeilen-, Spalten- und Diagonalenprodukte gleich 1 sind (magisches Produkt).

$\frac{1}{8}$	4	2
16	1	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8

Abb. 8: Magisches Produkt

Websites

Thomas Jahre, Aufgabe der Woche, Serie 54, Problem 639
www.schulmodell.eu/unterricht/faecher/mathematik/wochenaufgabe/serie-54.html

Hans Walser: Magische Kreise
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Magische_Kreise/Magische_Kreise.htm

Hans Walser: Magische Puzzle
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Puzzle/Mag_Puzzle.htm

Hans Walser: Magische Quadrate ungerader Seitenlänge
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate/Mag_Quadrate.htm

Hans Walser: Magische Quadrate überlagern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate4/Mag_Quadrate4.htm

Hans Walser: Magische Quadrate überlagern
http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Mag_Quadrate2/Mag_Quadrate2.htm

Hans Walser: Magisches Fraktal
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Magisches_Fraktal/Magisches_Fraktal.htm

Hans Walser: Vortrag: Magische Symmetrie
http://www.walser-h-m.ch/hans/Vortraege/20181117/index.html

Literatur

Walser, Hans (2018): Magische Symmetrie. MI, Mathematikinformation Nr. 69, 15. September 2018. ISSN 1612-9156. 25-33.