

Hans Walser, [20200714]

Logarithmische Kantenmittenspiralen

Anregung: M. E., B.

1 Worum geht es?

Logarithmische Kantenmittenspiralen, welche sich in zyklischer Folge ein- und umschrieben sind.

2 Einstiegsbeispiel

Wir beginnen mit einem regelmäßigen Achteck (Abb. 1.1a). Jede zweite Kante ist farbig angemalt, im positiven Drehsinn in den Farben rot, gelbgrün, hellblau und violett.

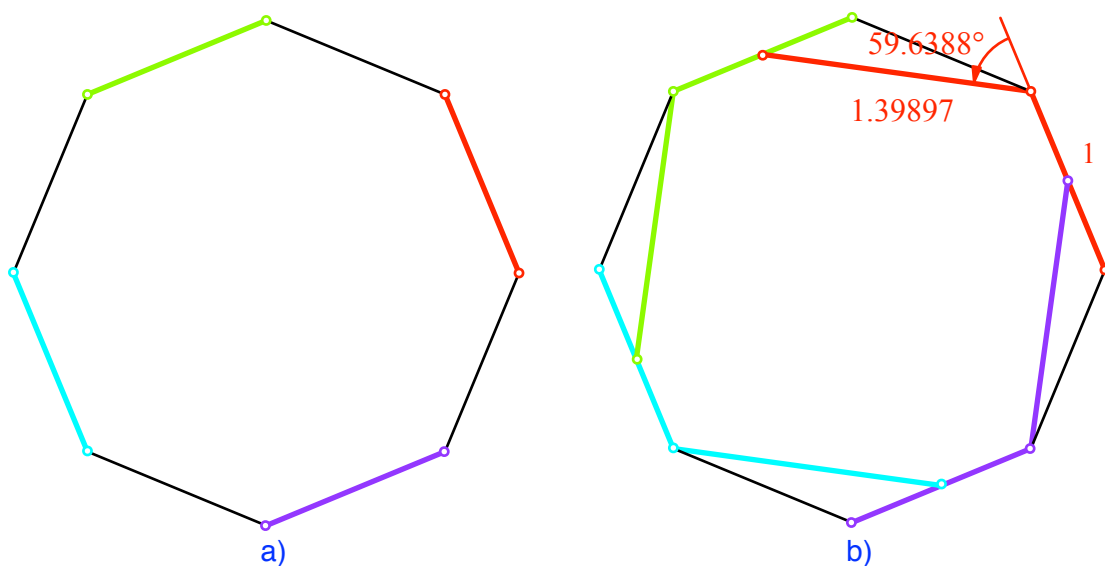


Abb. 1.1: Start und erster Schritt

Nun verbinden wir das im positiven Drehsinn zweite Ende der roten Startstrecke mit dem Mittelpunkt der gelbgrünen Strecke (Abb. 1.1b). Diese Verbindung zeichnen wir rot. Sie ist deutlich länger (139.897%) als die rote Startstrecke. Analog verbinden wir das Ende der gelbgrünen Startstrecke mit dem Mittelpunkt der hellblauen Strecke. Ebenso verfahren wir mit hellblau und violett.

Die Abbildung 1.2 zeigt die beiden nächsten Schritte. Wir sehen, dass die Längen der neuen Strecken keinem erkennbaren Muster folgen. Auch die Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Strecken gleicher Farbe variieren.

Aus Symmetriegründen sind die Spiralen der verschiedenen Farben kongruent.

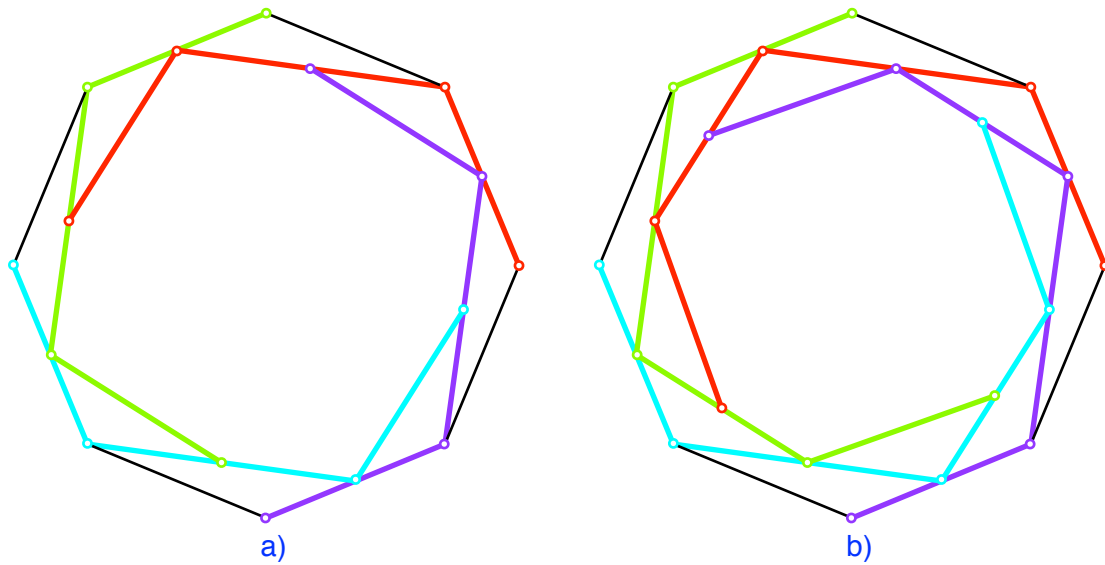


Abb. 1.2: Schritte drei und vier

In der Abbildung 1.3 sehen wir zwei weitere Schritte.

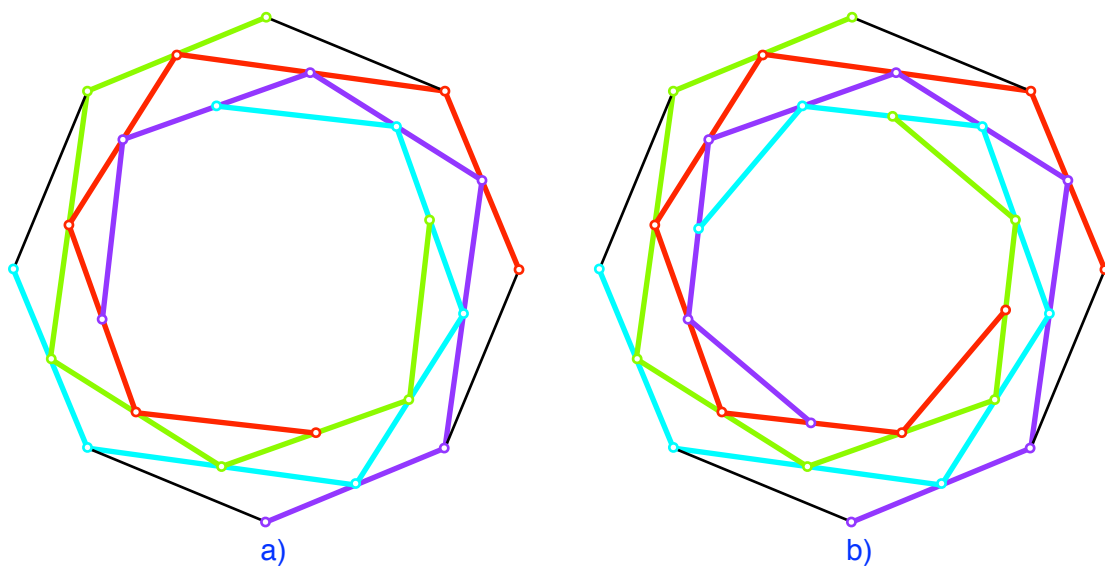


Abb. 1.3: Weitere Schritte

Die Tabelle 1 gibt für eine Spirale (die rote) die Längen-Veränderungsfaktoren zweier aufeinanderfolgender Strecken sowie deren Richtungsänderung (Außenwinkel).

Lesebeispiel: Beim Übergang vom der ersten zur zweiten Strecke haben wir einen Längen-Veränderungsfaktor 1.398966326. Die zweite Strecke misst also etwa 139.897%

der ersten. Sie weicht um einen Winkel von 59.63880658° im positiven Drehsinn von der ersten ab. In der Abbildung 1.1b sind diese Daten eingetragen.

Schritt	Veränderungsfaktor	Richtungsänderung [°]
2	1.398966326	59.63880658
3	0.7472553970	65.62558310
4	0.9868422493	51.85877233
5	0.9053338153	63.88612868
6	0.8933681725	56.28259906
7	0.9348357449	60.13327190
8	0.8957770916	58.81640314
9	0.9222644246	58.81688762
10	0.9080905470	59.28576014
11	0.9134508382	58.78697287
12	0.9128420468	59.14692518
13	0.9115486769	58.94540429
14	0.9131407453	59.02933253
15	0.9119194226	59.01302936
16	0.9126400202	59.00003050
17	0.9123162402	59.01969206
18	0.9123995417	59.00353121
19	0.9124279882	59.01357631
20	0.9123677718	59.00875429

Tab. 1: Veränderungsfaktoren und Richtungsänderungen

Sowohl die Längen-Veränderungsfaktoren als auch die Richtungsänderungen variieren am Anfang recht stark. Wir vermuten aber, dass sich diese Daten bei zunehmenden Schrittzahlen je einem Grenzwert annähern.

Die Abbildung 2 zeigt stark vergrößert den Ausschnitt für die Schrittzahlen von 15-20. Die Spiralen sehen aus wie logarithmische Spiralen mit konstantem Längen-Veränderungsfaktor und konstanter Richtungsänderung.

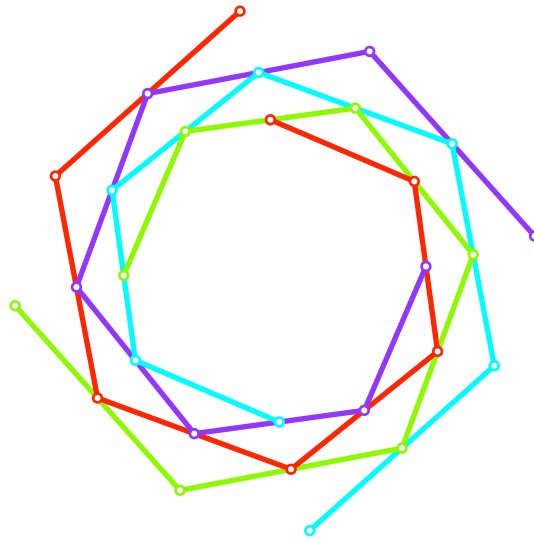


Abb. 2: Schritte 15-20

3 Berechnung der Grenzwerte

Wir gehen von vier logarithmischen Kantenmittenspiralen aus und betten diese in die Gaußsche Ebene der komplexen Zahlen ein (Abb. 3).

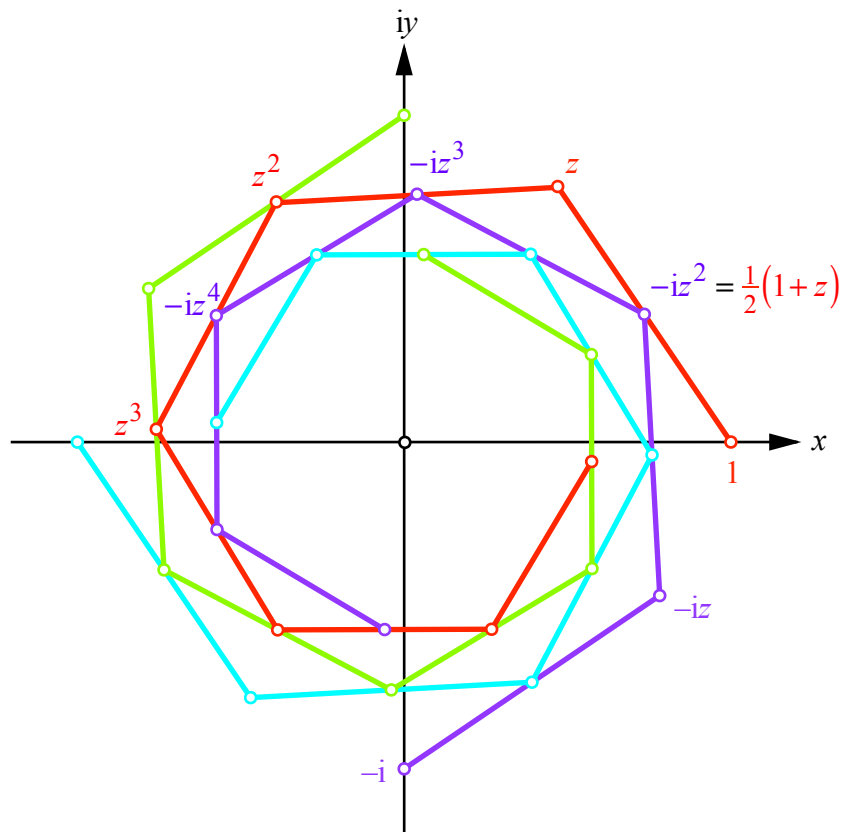


Abb. 3: Arbeitsfigur

Die Schlüsselzahl ist die Zahl z . Ihr Betrag ist der gesuchte konstante Längenveränderungsfaktor, ihr Argument die gesuchte konstante Richtungsänderung. Aus der Arbeitsfigur (Abb. 3) lesen wir für z die Bedingung ab:

$$iz^2 = \frac{1}{2}(1+z) \quad (1)$$

Diese quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten hat für z die beiden Lösungen:

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{1-8i}) \approx 0.4697824545 + 0.7821612112i \\z_2 &= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{1-8i}) \approx -0.4697824545 - 0.2821612112i\end{aligned}\tag{2}$$

Man beachte, dass die beiden Lösungen *nicht* konjugiert komplex sind, da die quadratische Gleichung (1) komplexe Koeffizienten enthält.

Die für uns relevante erste Lösung hat den Betrag

$$|z_1| = \frac{1}{8} \sqrt{4 \left(1 + \frac{\sqrt{2+2\sqrt{65}}}{2} \right)^2 + 2\sqrt{65} - 2} \approx 0.9123988791\tag{3}$$

und das Argument:

$$\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{2+\sqrt{2+2\sqrt{65}}}{\sqrt{-2+2\sqrt{65}}}\right) \approx 59.01008801^\circ\tag{4}$$

Diese Daten passen zu unseren Vermutungen auf Grund der Tabelle 1.

Die Abbildung 4 zeigt die vier zugehörigen logarithmischen Kantenmittenspiralen.

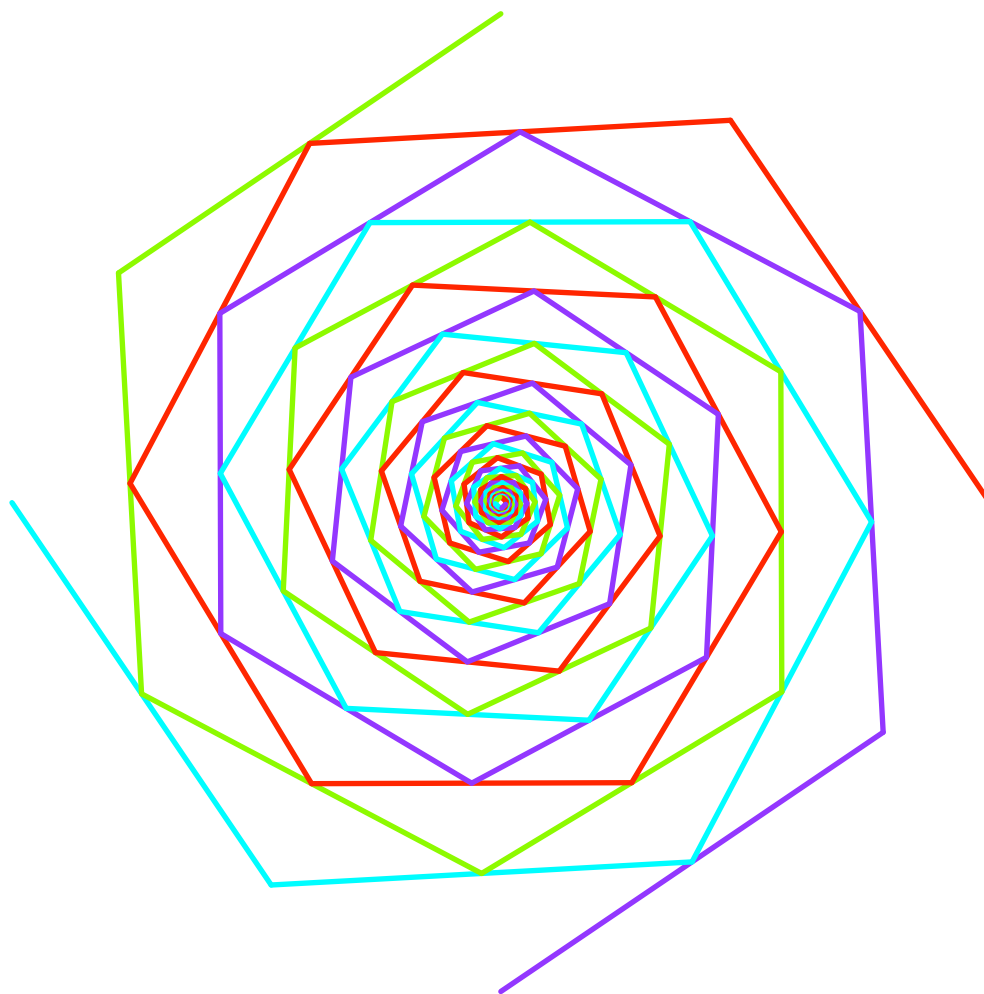


Abb. 4: Logarithmische Kantenmittenspiralen

4 Allgemein

Für n Spiralen führt die analoge Überlegung für die Schlüsselzahl z zur Bedingung:

$$e^{-i\frac{2\pi}{n}} z^2 = \frac{1}{2}(1+z) \quad (5)$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen:

$$z_1 = \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{n}} \left(1 + \left(1 + 8e^{-\frac{2\pi i}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad z_2 = \frac{1}{4} e^{\frac{2\pi i}{n}} \left(1 - \left(1 + 8e^{-\frac{2\pi i}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6)$$

Die Tabelle 2 gibt die ersten Beträge (Längen-Veränderungsfaktoren) und die relevanten Richtungsänderungen.

Anzahl Spiralen	Veränderungsfaktor	Richtungsänderung [°]
2	0.7071067812	110.7048111
3	0.8502352679	77.52110310
4	0.9123988791	59.01008801
5	0.9430182565	47.50705136
6	0.9600982308	39.71914504
7	0.9705414372	34.11053230
8	0.9773758771	29.88337441
9	0.9820866862	26.58510972
10	0.9854686738	23.94072904

Tab. 1: Veränderungsfaktoren und Richtungsänderung

5 Beispiele

Eine Bildergalerie

5.1 Zwei Spiralen

Der Veränderungsfaktor ist $q = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$, die Richtungsänderung:

$$\phi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \approx 110.705^\circ \quad (7)$$

Die Abbildung 5 zeigt die beiden Spiralen.

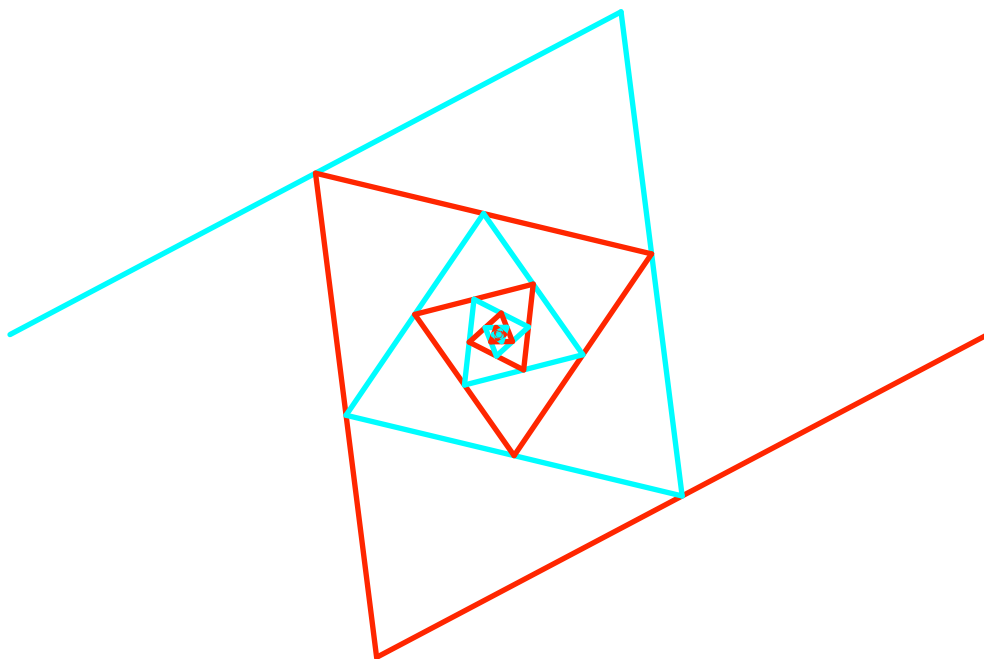


Abb. 5: Zwei Spiralen

Die Figur ist aus gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis 1 und den Schenkeln $\sqrt{2}$ aufgebaut (Abb. 6).

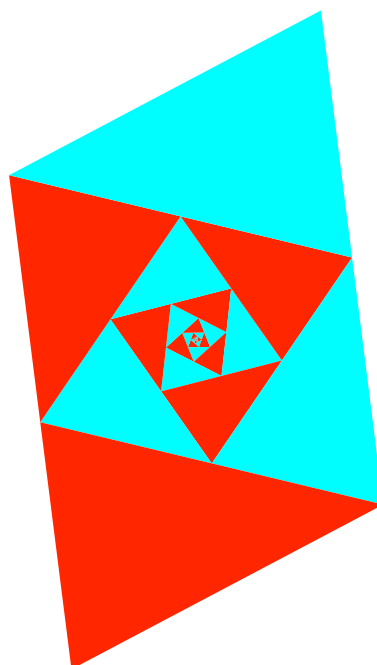


Abb. 6: Aufbau aus gleichschenkligen Dreiecken

5.2 Drei Spiralen

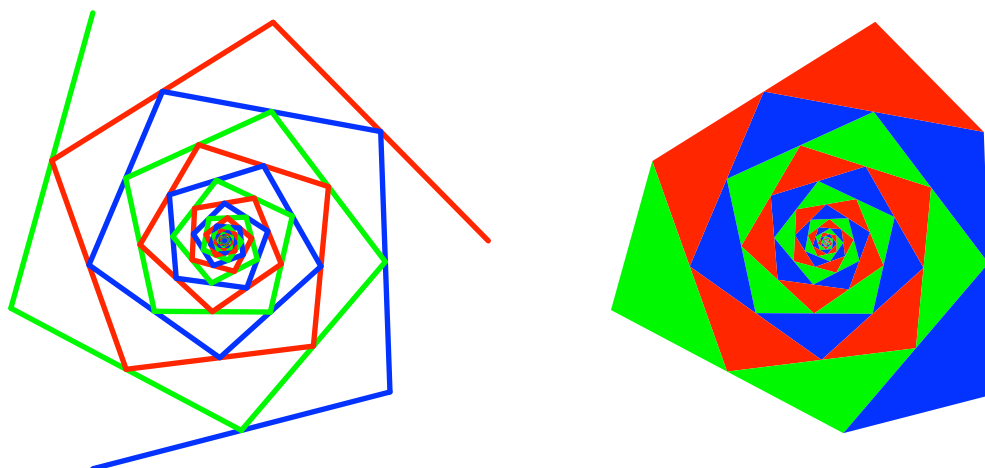


Abb. 7: Drei Spiralen

Die Dreiecke sind jetzt nicht mehr gleichschenkelig.

5.3 Vier Spiralen

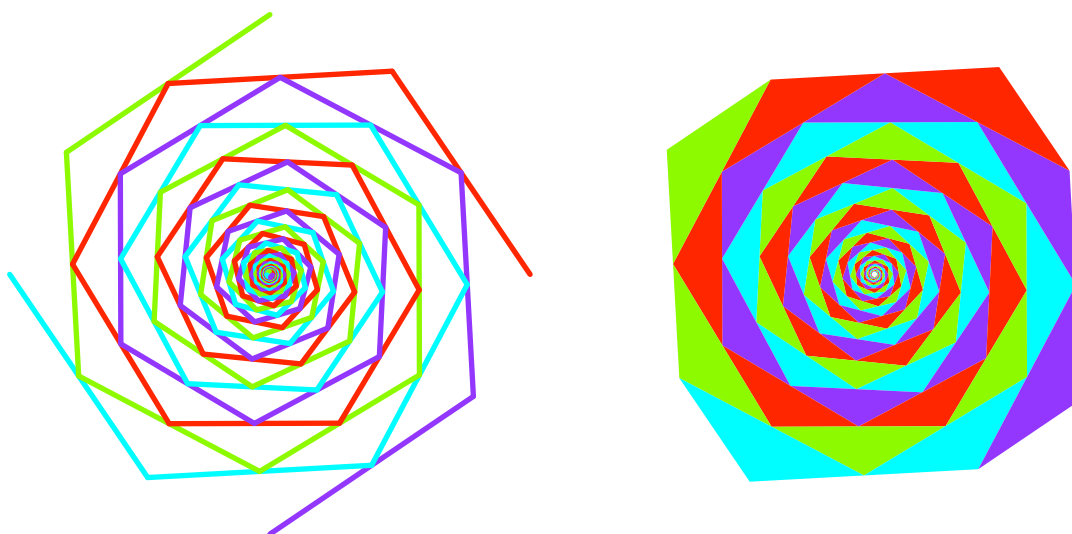


Abb. 8: Vier Spiralen

5.4 Fünf Spiralen

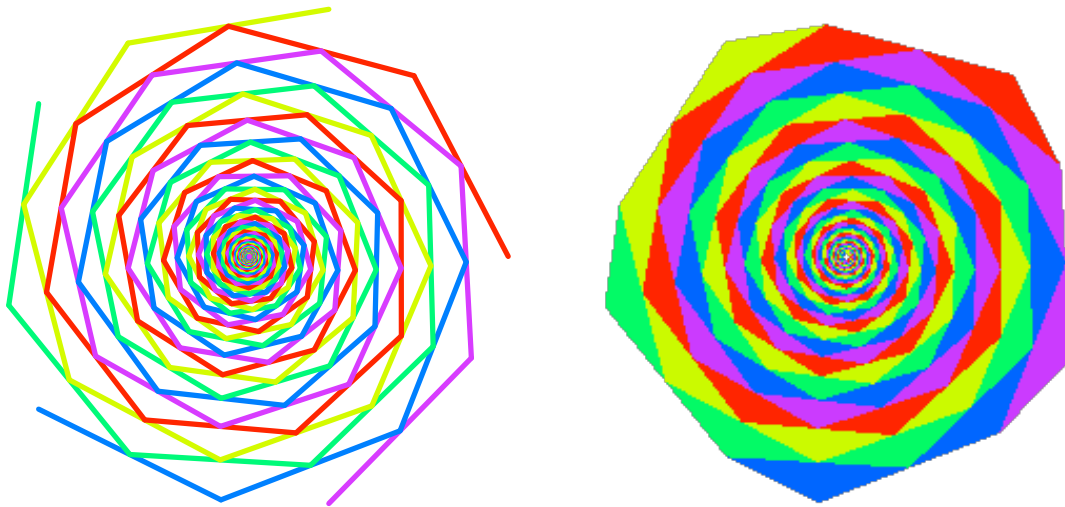


Abb. 9: Fünf Spiralen

5.5 Sechs Spiralen

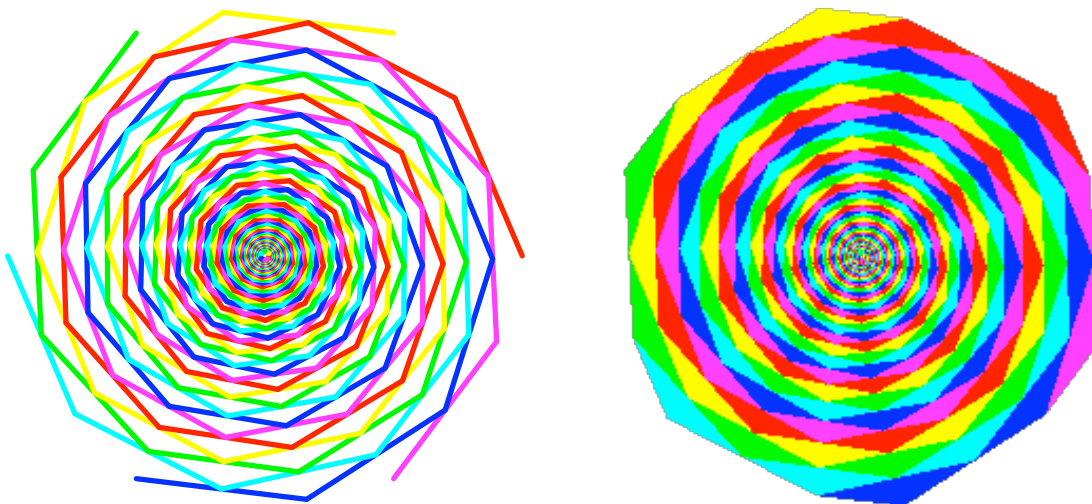


Abb. 10: Sechs Spiralen

Websites

Hans Walser: Spiralen im regelmäßigen Vieleck

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Spiralen_reg_Vieleck/Spiralen_reg_Vieleck.htm

Hans Walser: Kantenmittenspirale

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kantenmittenspirale/Kantenmittenspirale.htm