Hans Walser, [20170306]

Lineares bei Pythagoras

Anregung: B. J., B. und E. V., M.

1 Worum geht es?

Die Sätze im Umfeld des Satzes von Pythagoras sind Flächensätze. Auch für Längenberechnungen muss über den Umweg von Flächenberechnungen vorgegangen werden.

Es wird ein Beispiel gezeigt, wo dies *nicht* der Fall ist.

2 Die Basisfigur

In die kanonische Pythagoras-Figur zeichnen wir die rote Strecke gemäß Abbildung 1. Wie lang ist diese rote Strecke?

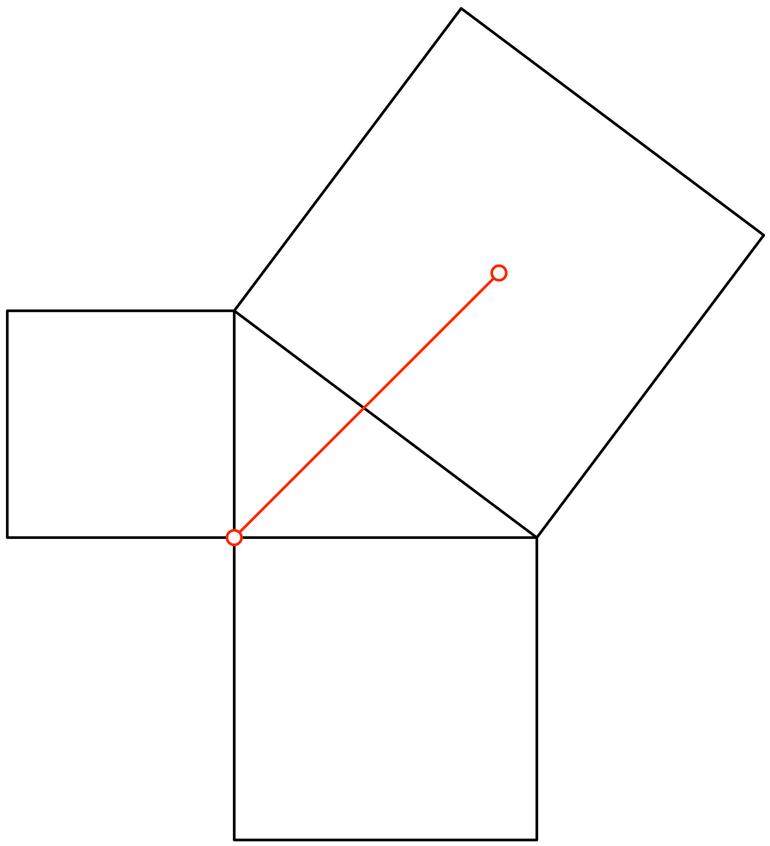

Abb. 1: Wie lang ist die rote Strecke?

3 Bezeichnungen

Wir arbeiten mit den Bezeichnungen der Abbildung 2.

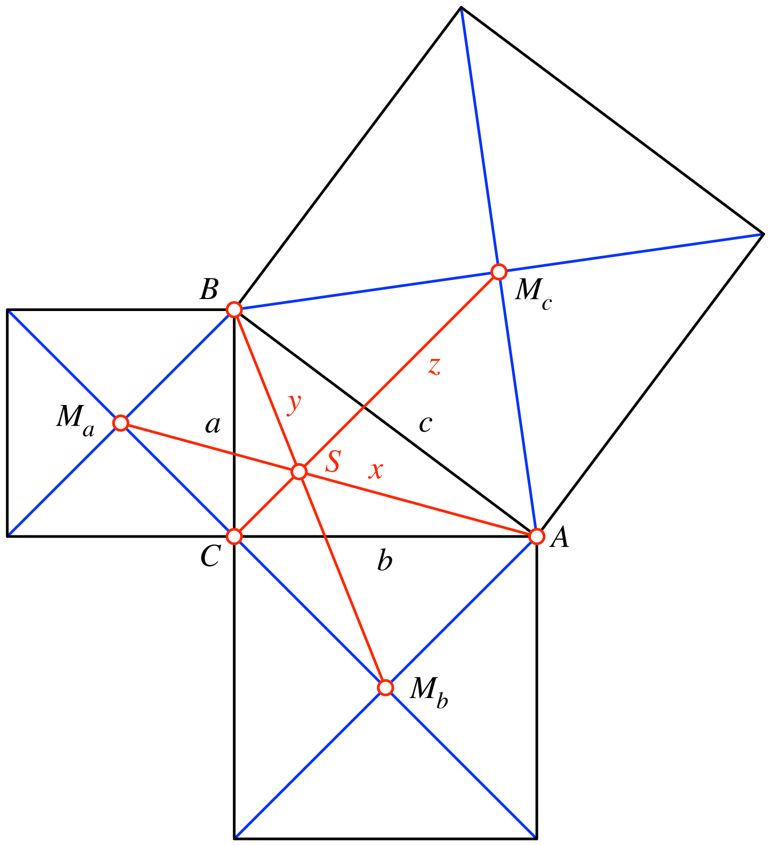

Abb. 2: Bezeichnungen

Gesucht ist die Länge der Strecke z.

4 Lösungswege

Es werden zwei verschiedene Lösungswege gezeigt.

4.1 Satz des Ptolemäus

Das Viereck AM_cBC ist ein Sehnenviereck (Abb. 3). Die vier Punkte liegen auf dem Thaleskreis des Dreieckes ABC.

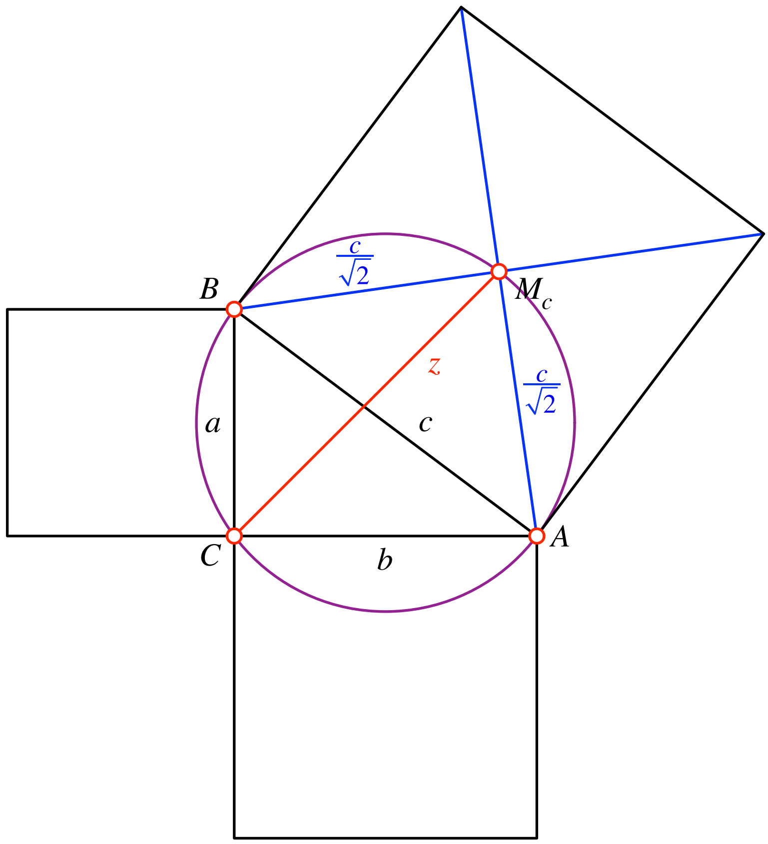

Abb. 3: Sehnenviereck

Nach dem Satz des Ptolemäus gilt daher:

$$cz = a\frac{c}{\sqrt{2}} + b\frac{c}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich die lineare Beziehung:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b) \tag{2}$$

4.2 Einbetten in Quadrat

Wir betten das Hypotenusenquadrat des rechtwinkligen Dreiecks ABC in ein größeres Quadrat ein gemäß Abbildung 4.

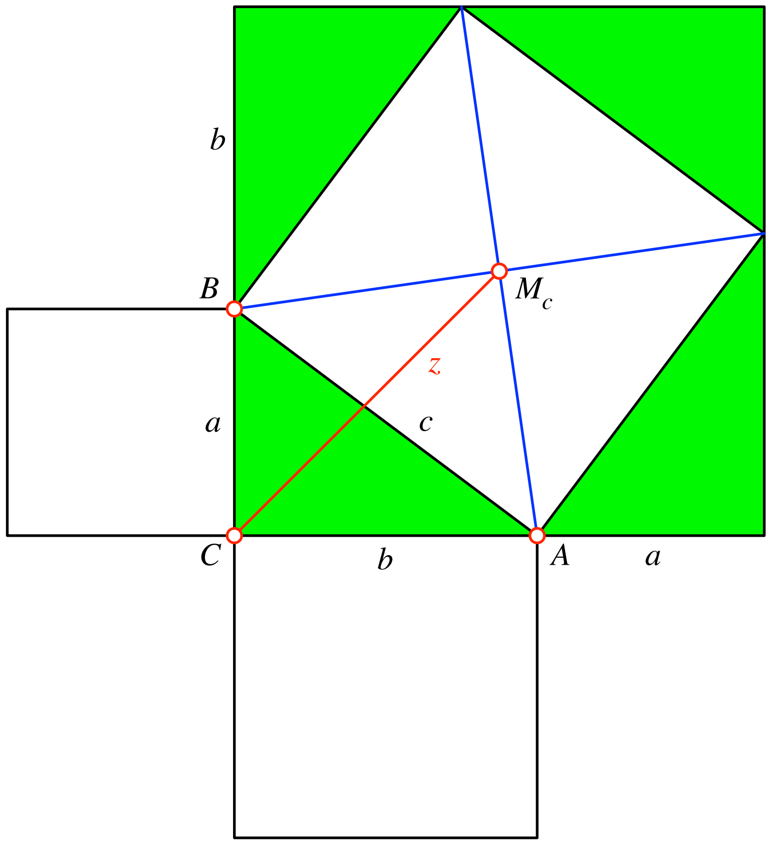

Abb. 4: Einbetten in Quadrat

Dieses größere Quadrat hat die Seitenlänge $a + b$. Die gesuchte Länge z ist dessen halbe Diagonale. Damit erhalten wir erneut (2). Zudem zeigt sich, dass die Strecke z die Winkelhalbierende des rechten Winkels des Dreiecks ABC ist.

5 Bemerkungen und Ergänzungen

5.1 Gleiche Länge

Die Strecke z ist gleich lang wie die Strecke M_aM_b. Dies ergibt sich unmittelbar aus (2). Die Strecke z ist auch orthogonal zur Strecke M_aM_b. Dies ergibt sich als Sonderfall des Satzes von van Aubel.

5.2 Quadrat einpassen

Wir können in die Figur der Abbildung 2 ein weiteres Quadrat einpassen (Abb. 5).

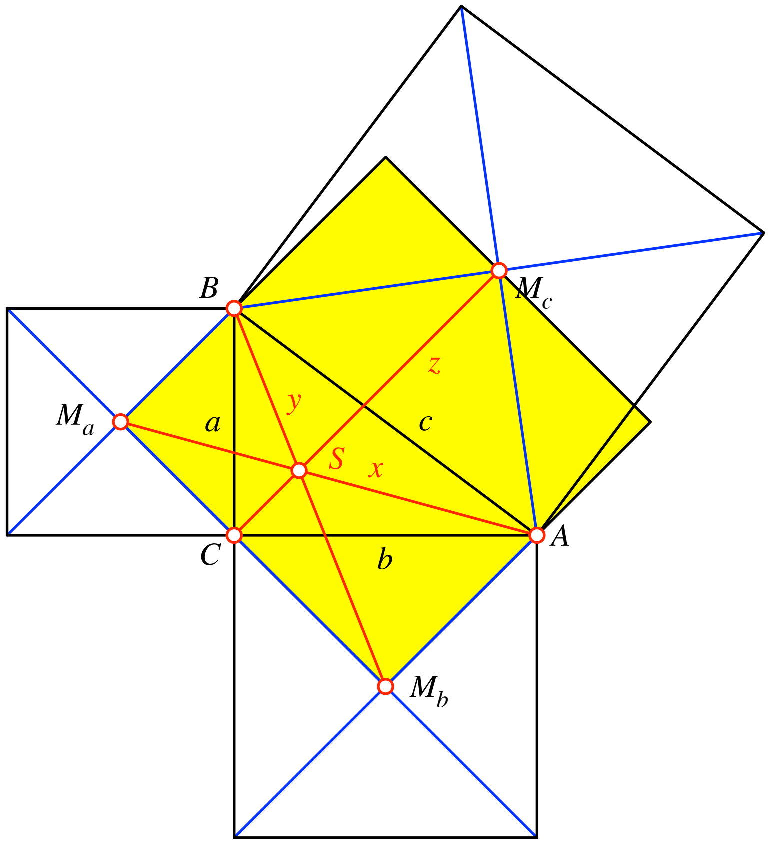

Abb. 5: Quadrat einpassen

5.3 Schnittpunkt

Die drei Strecken x, y, z sind kopunktal, Schnittpunkt S. Dies ist ein Sonderfall eines Satzes von Jacobi (Walser 1991).

Für die Strecke CS erhalten wir mit Ähnlichkeitsüberlegungen:

$$\overline{CS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ab}{a+b} = \frac{1}{2} \frac{ab}{z} \tag{3}$$

5.4 Flächensatz

Das Dreieck SM_aM_b ist flächenmäßig halb so groß wie das rechtwinklige Dreieck ABC (Abb. 6).

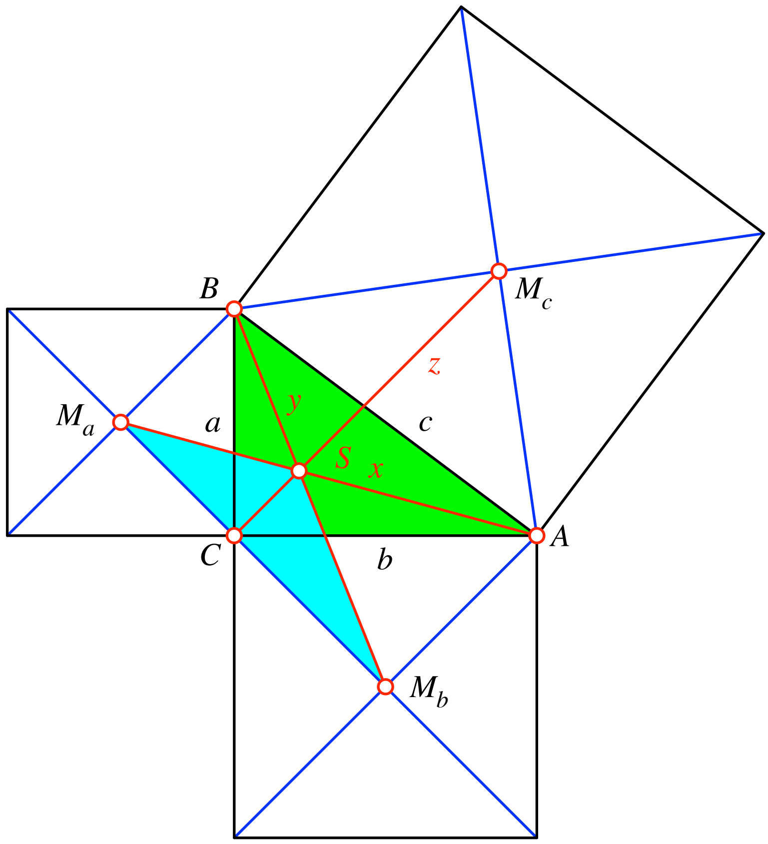

Abb. 6: Halber Flächeninhalt

5.5 Die beiden anderen Transversalen

Für die Berechnung der Längen der Transversalen x und y benötigen wir den Satz des Pythagoras. Das geht also nicht mehr linear.

Literatur

Walser, Hans (1991): Ein Schnittpunktsatz. Praxis der Mathematik (33), 1991, 70-71.