

Hans Walser, [20200221]

## Lemniskate als Enveloppe von Kreisen

Anregung: Lauchli 2020

### 1 Worum geht es?

Die Bernoulli'sche Lemniskate kann als Enveloppe von Kreisen erhalten werden. Hintergrund ist ein ebener Schnitt durch den Torus. Die Schnittebene ist tangential an einen Punkt des Kehlkreises des Torus.

### 2 Torus

Wir arbeiten mit einem Torus mit dem „großen“ Radius  $R$  (das ist der Radius vom Torusmittelpunkt zu den Zentren der Meridiankreise) und dem „kleinen“ Radius  $r$  (der Radius der Meridiankreise). Als Torusmittelpunkt nehmen wir den Koordinatenursprung, als Torusachse die  $y$ -Achse.

Dieser Torus hat die implizite Gleichung:

$$4R^2(r^2 - y^2) = (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 \quad (1)$$

Herleitung der impliziten Gleichung: Wir schneiden den Torus mit zur  $x,z$ -Ebene parallelen Ebenen im Abstand  $\pm y$ . Dies ergibt vier Kreise mit den Radien  $R \pm \sqrt{r^2 - (\pm y)^2}$ . Diese haben somit die Gleichungen:

$$\left( R \pm \sqrt{r^2 - (\pm y)^2} \right)^2 = x^2 + z^2 \quad (2)$$

Durch Quadrieren und Wegmachen der Wurzeln erhalten wir daraus (1).

Die Abbildung 1 zeigt einen Torus mit  $R = 2$  und  $r = 0.5$ . In der Abbildung 1a) wurde mit der impliziten Gleichung (1) mit  $12 \times 6 \times 12$  Gitterpunkten gearbeitet. Die Abbildung 1b) zeigt eine geglättete Version.

Natürlich kann man den Torus auch mit einer Parameterdarstellung beschreiben. Für unsere Zwecke ist aber die implizite Koordinatengleichung sachdienlicher.

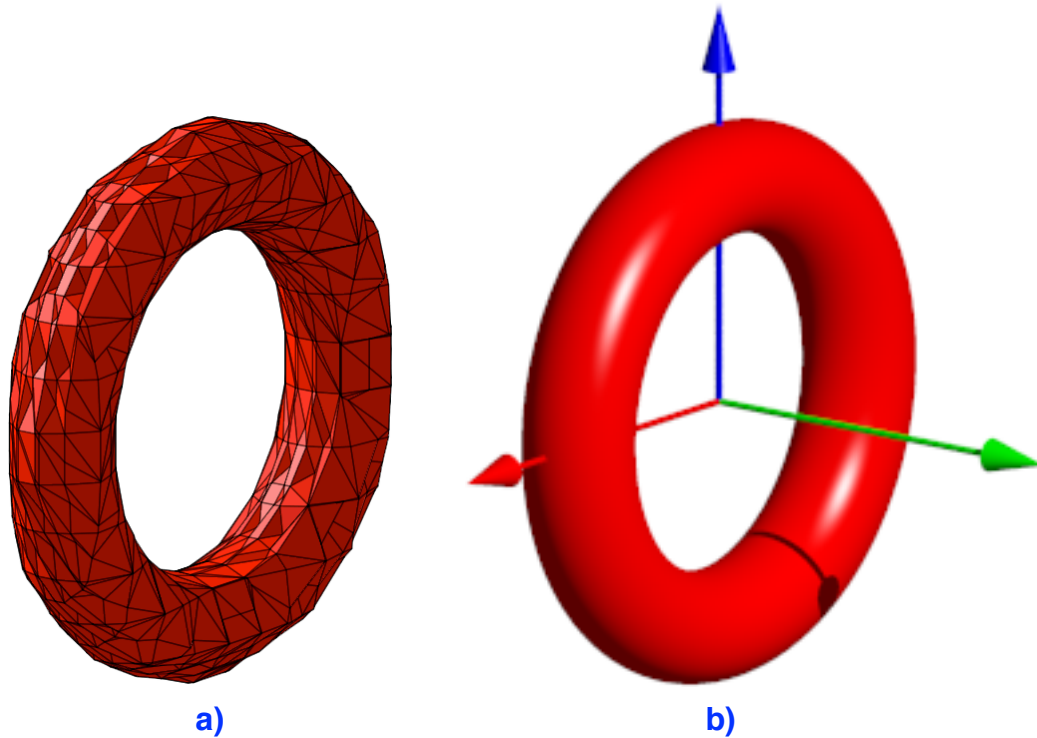
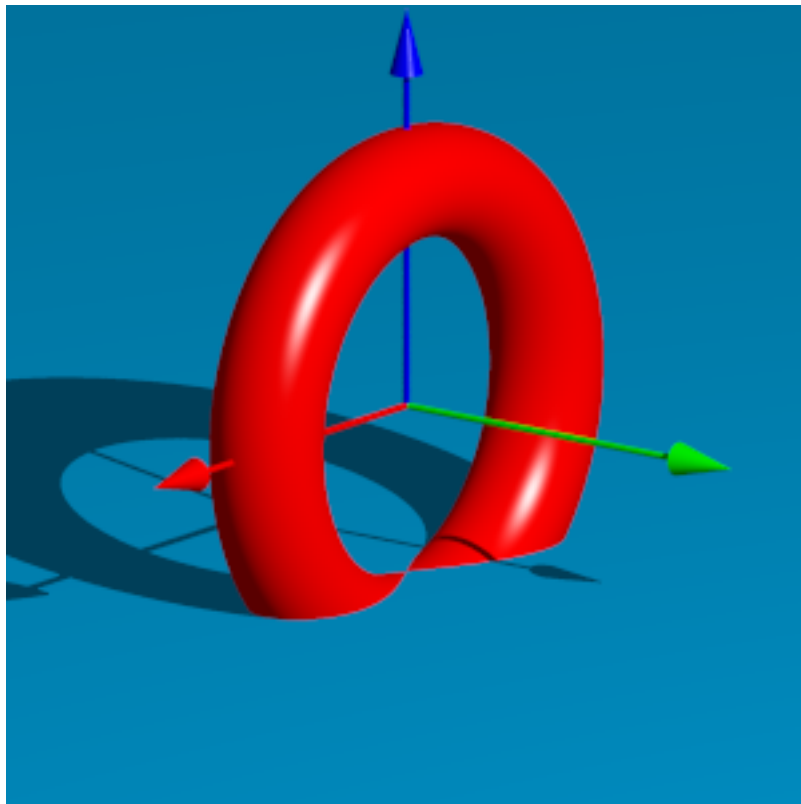


Abb. 1: Torus

Nun tauchen wir den Torus ins Wasser, bis die Wasseroberfläche den Kehlkreis erreicht (Abb. 2).



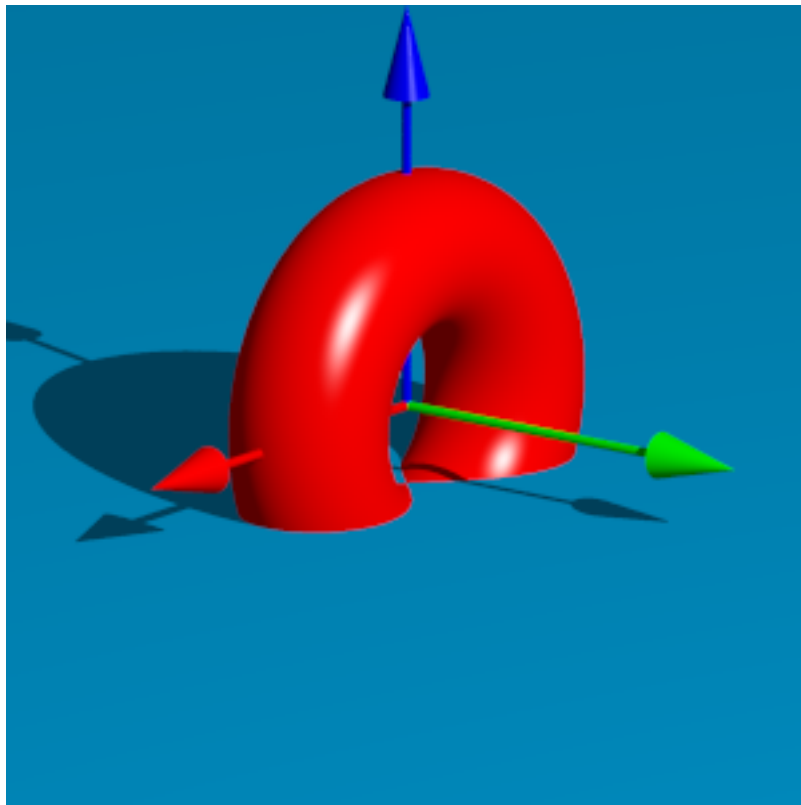
**Abb. 2: Eintauchen**

Die Schnittfigur auf der Wasseroberfläche ist eine 8-förmige Kurve. Allerdings sind haben wir im Doppelpunkt keine rechten Winkel wie das für die Bernoulli'sche Lemniskate der Fall sein müsste.

### 3 Die Bernoulli'sche Lemniskate

Die Bernoulli'sche Lemniskate erhalten wir für ein Radienverhältnis  $R:r = 2:1$ .

Die Abbildung 3 zeigt die Situation für  $R = 1$  und  $r = 0.5$ .



**Abb. 3: Bernoulli'sche Lemniskate**

Wir haben zu zeigen, dass sich im Doppelpunkt rechte Winkel ergeben.

#### 3.1 Anschaulicher Beweis mit viel Symmetrie und etwas Differentialgeometrie

Bei einem Radienverhältnis  $R:r = 2:1$  ist der Kehlkreis gleich groß wie ein Meridiankreis. In einem Kehlkreispunkt haben wir also entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungen. Die Dupin'sche Indikatrix ist eine gleichseitige Hyperbel. Die Asymptotenrichtungen sind orthogonal. Das sind aber auch die Tangentenrichtungen im Doppelpunkt.

#### 3.2 Rechnerischer Beweis

Wir arbeiten mit  $R = 1$  und  $r = 0.5$ . Aus (1) ergibt sich dafür die Torusgleichung:

$$4\left(\frac{1}{4} - y^2\right) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1 - \frac{1}{4}\right)^2 \quad (3)$$

Die Wasseroberfläche hat die Gleichung  $z = -R + r = -\frac{1}{2}$ . Eingesetzt in (3) erhalten wir:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0 \quad (4)$$

Dies ist die Gleichung der Bernoulli'schen Lemniskate.

#### 4 Torus und Kugeln

Die Idee ist, den Torus durch eine Folge von Kugeln zu ersetzen.

Die Abbildung 4a zeigt die Situation mit sechs Kugeln. Zwei Kugeln berühren die Wasseroberfläche, zwei schneiden einen Kreis heraus (Abb. 4b).

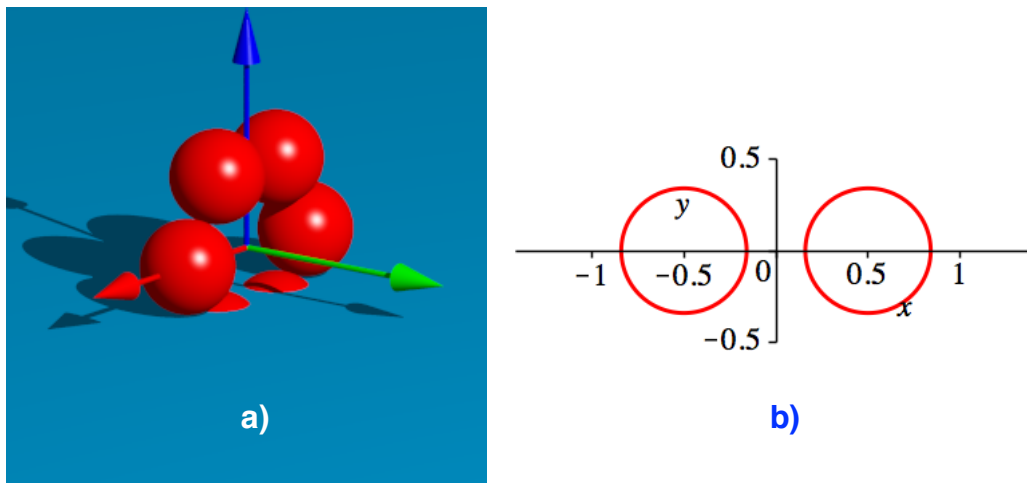
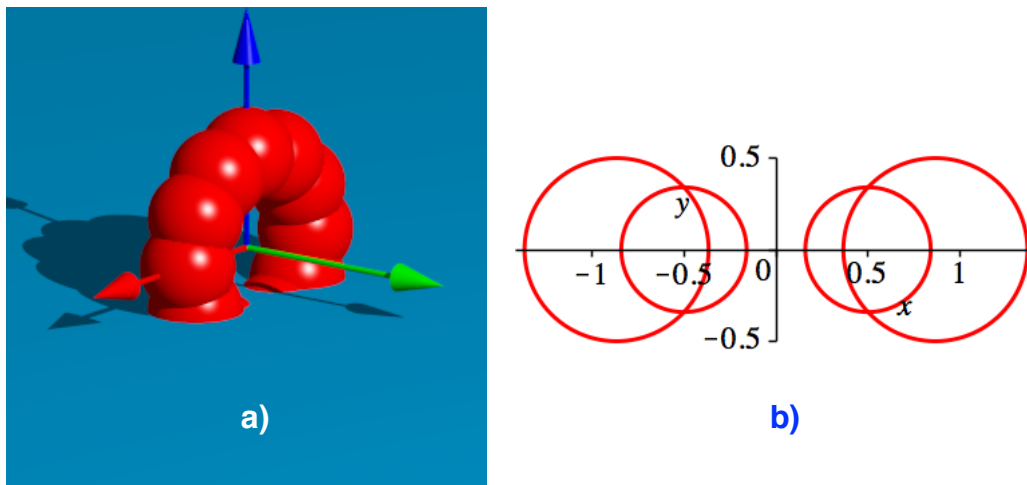


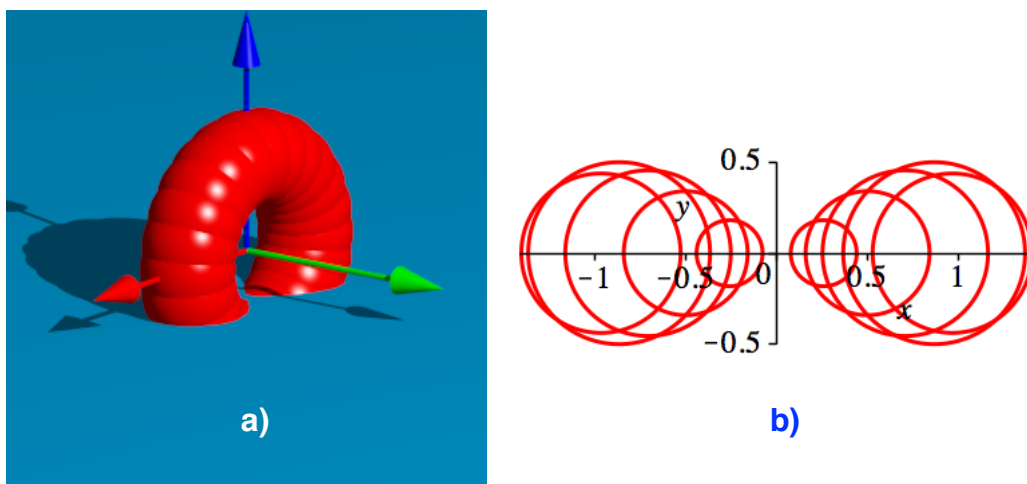
Abb. 4: Sechs Kugeln

Die Abbildung 5 zeigt die Situation mit zwölf Kugeln. Die Kugeln und entsprechend die Kreise überschneiden sich. Sechs der zwölf Kugeln haben Wasserkontakt.



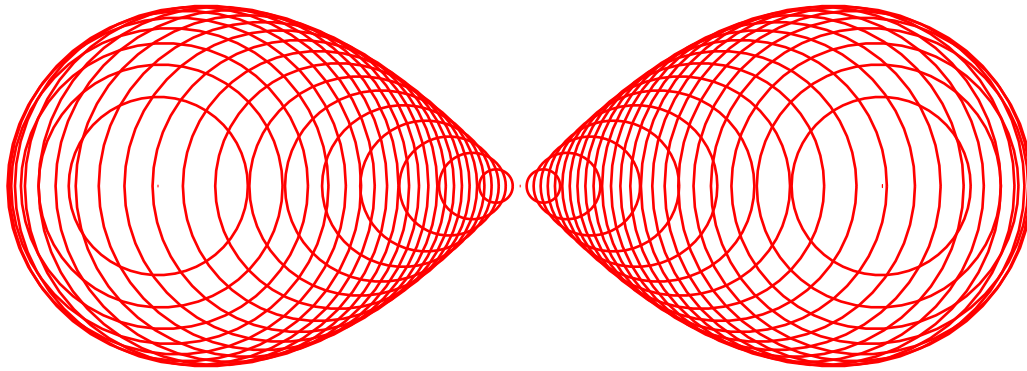
**Abb. 5: Zwölf Kugeln**

Die Abbildung 6 zeigt die Situation mit 24 Kugeln. Davon erreichten zwölf die Wasseroberfläche.



**Abb. 6: 24 Kugeln**

Die Abbildung 7 zeigt die Schnittkreise bei 96 Kugeln (von denen 48 Wasserkontakt haben). Der Umriss ist die Bernoulli'sche Lemniskate. Man beachte, dass nicht alle Kreise der Kreisschar die Umrisslinie erreichen.



**Abb. 7: 96 Kugeln**

## 5 Rechnerisches

Bei  $2N$  Kugeln haben deren  $N$  Wasserkontakt.

Wir führen einen Parameter  $t_n$  ein:

$$t_n = n \frac{\pi}{N}, \quad n \in \{1, 2, \dots, 2N\} \quad (5)$$

Die Mittelpunkte der  $2N$  Kugeln haben die Koordinaten:

$$\left( \cos(t_n), 0, \sin(t_n) \right), \quad n \in \{1, 2, \dots, 2N\} \quad (6)$$

Die Kreise in der  $x,y$ -Darstellung haben die Mittelpunktkoordinaten  $(\cos(t_n), 0)$  und die Radien:

$$\rho_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\sin(t_n) - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{-\sin^2(t_n) - \sin(t_n)} \quad (7)$$

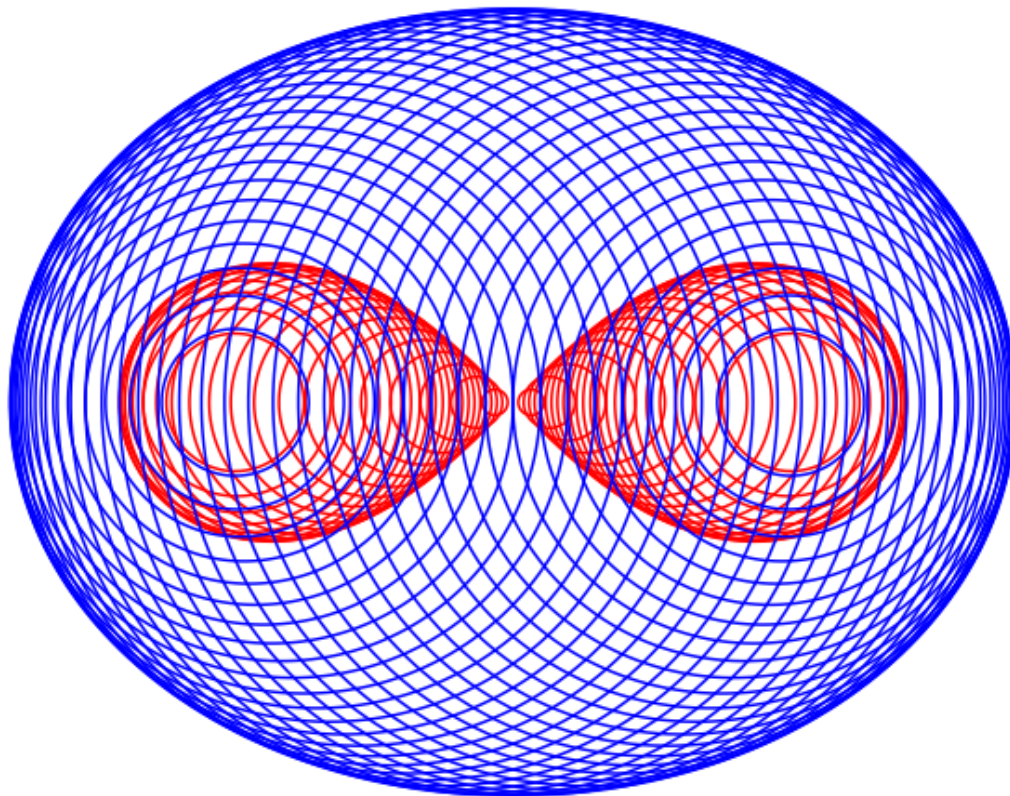
Für  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  wird der Radius (7) rein imaginär (die Kugeln sind oberhalb des Wasserspiegels), für  $n \in \{N, \dots, 2N\}$  reell.

Wir ändern (7) ab in:

$$\rho_n = \sqrt{\left| -\sin^2(t_n) - \sin(t_n) \right|} \quad (8)$$

Damit haben wir auch für  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  reelle Werte (welche geometrische Bedeutung haben diese?).

Die Abbildung 8 zeigt die erweiterte Kreisschar.



**Abb. 8: Erweiterte Kreisschar**

Die Enveloppe der erweiterten Kreisschar sieht aus wie eine Ellipse, ist aber keine [\[6\]](#).



## Literatur

Haftendorn, Dörte (2017): Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen. Wiesbaden: Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-14748-8.

Läuchli, Juan (2020): Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht. VSMP Bulletin. Januar 2020, No 142, S. 6-11.

## Websites

[1] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 23.02.2020):

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate/Lemniskate.htm>

[2] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 23.02.2020):

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate2/Lemniskate2.htm>

[3] Hans Walser: Lemniskate (abgerufen 23.02.2020):

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskate3/Lemniskate3.htm>

[4] Hans Walser: Lemniskatenmodell (abgerufen 23.02.2020)

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskatenmodell/index.html>

[5] Hans Walser: Lemniskatoid (abgerufen 23.02.2020)

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/L/Lemniskatoid/Lemniskatoid.htm>

[6] Hans Walser: Eilinie (abgerufen 27.02.2020)

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Eilinie/Eilinie.htm>