

Hans Walser, [20201225]

Kuboktaeder

1 Worum geht es?

Stereografische Projektion des Kuboktaeders. Schöne Figuren

2 Stereografische Projektionen

Liniendarstellung: Wir stellen das Kuboktaeder auf eine Seitenfläche. Das kann ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck sein. Dann nehmen wir die Umkugel des Kuboktaeders und wählen den obersten Punkt („Nordpol“) als Projektionszentrum. Wir projizieren auf die Äquatorebene oder eine dazu parallele Ebene.

Kreisdiagramm: Die Projektion des Kuboktaeders von seinem Mittelpunkt aus auf die Umkugel (sphärisches Kuboktaeder) ergibt vier Großkreise, die sich paarweise unter dem kristallografischen Winkel

$$\phi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5288^\circ \quad (1)$$

schneiden. Die stereografische Projektion dieser Großkreise ergibt vier Kreise, die sich wegen der Winkelinvarianz der stereografischen Projektion ebenfalls unter diesem Winkel schneiden.

2.1 Erste Lösung

Wir stellen das Kuboktaeder auf eine Quadratseite (Abb. 1).

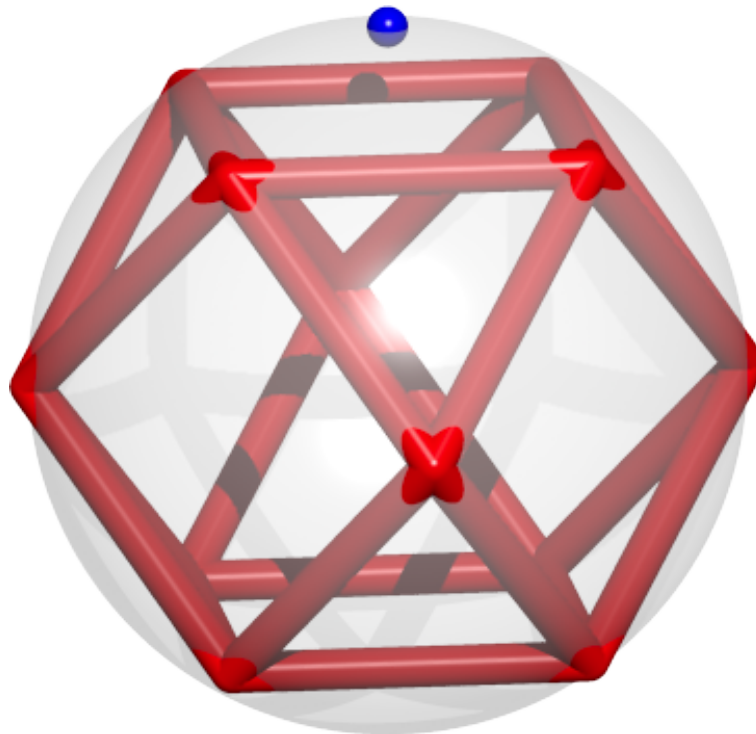


Abb. 1: Kuboktaeder auf Quadratseite

Die Abbildung 2 zeigt die entsprechende Projektion. Das oberste Quadrat erscheint außen und dick.



Abb. 2: Stereografische Projektion

Die Abbildung 3 zeigt dasselbe in einer Liniendarstellung.

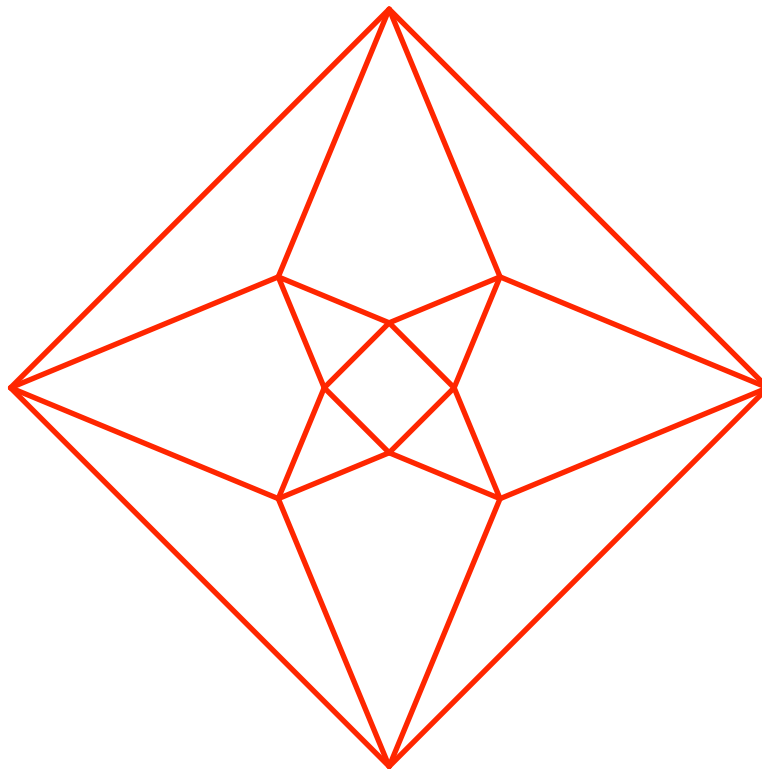


Abb. 3: Liniendarstellung

Die Figur enthält „schöne“ Winkel (Abb. 4) und kann daher leicht planimetrisch gezeichnet werden.

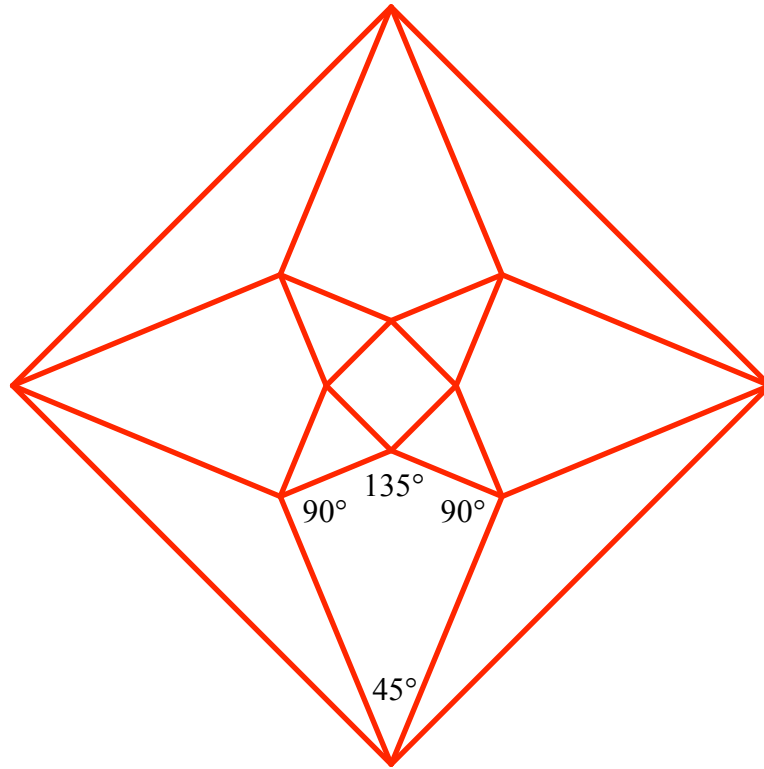


Abb. 4: Winkel

Der große (rot) und der kleine (gelb) Stern sind ähnlich (Abb. 5). Der Ähnlichkeitsfaktor ist:

$$\tan(22.5^\circ) = \sqrt{2} - 1 \approx 0.4142 \quad (2)$$



Abb. 5: Ähnliche Sterne

Die Figur kann daher iteriert werden (Abb. 6).



Abb. 6: Iteration

Die Figur kann mit 45° -Rhomben zum regelmäßigen Achteck ergänzt werden (Abb. 7).

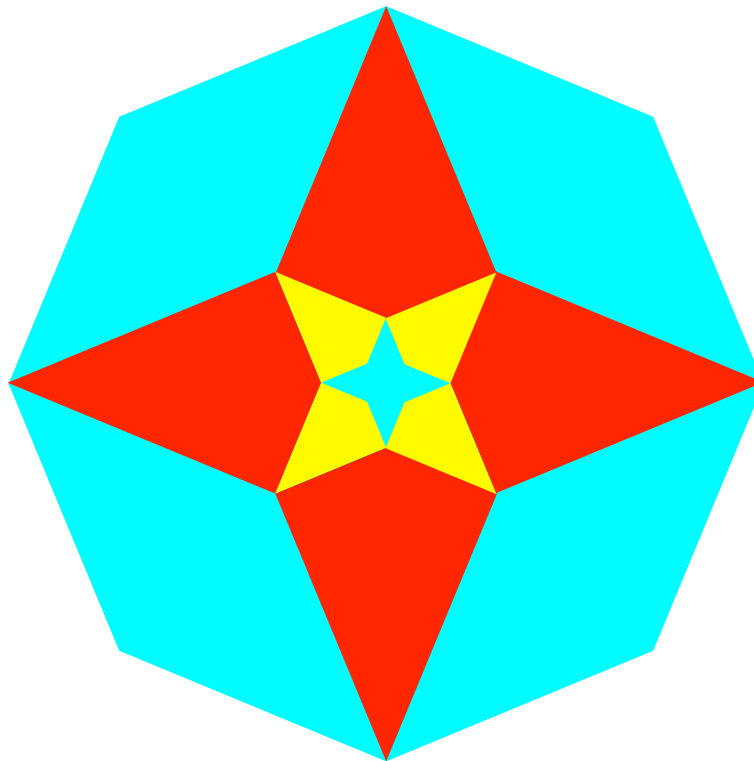


Abb. 7: Achteck

Die Abbildung 8 zeigt ein [Kugelmodell](#) der Projektion des Kuboktaeders vom Mittelpunkt aus auf die Umkugel (sphärisches Kuboktaeder). Es ist auf ein sphärisches Quadrat abgestellt.

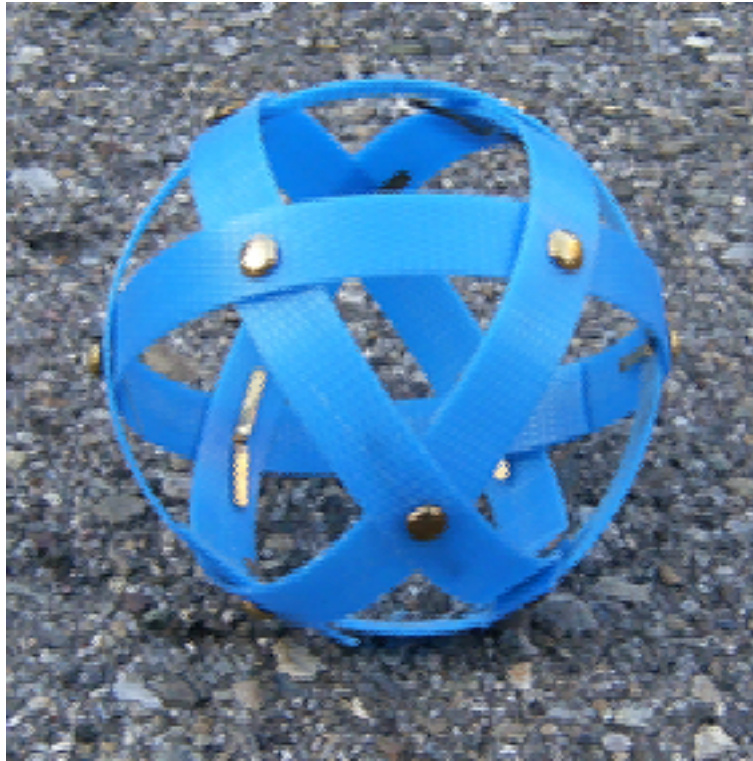


Abb. 8: Kugelmodell

Die Abbildungen 9 und 10 zeigen die Entwicklung der stereografischen Projektion aus der Liniendarstellung der Abbildung 3.

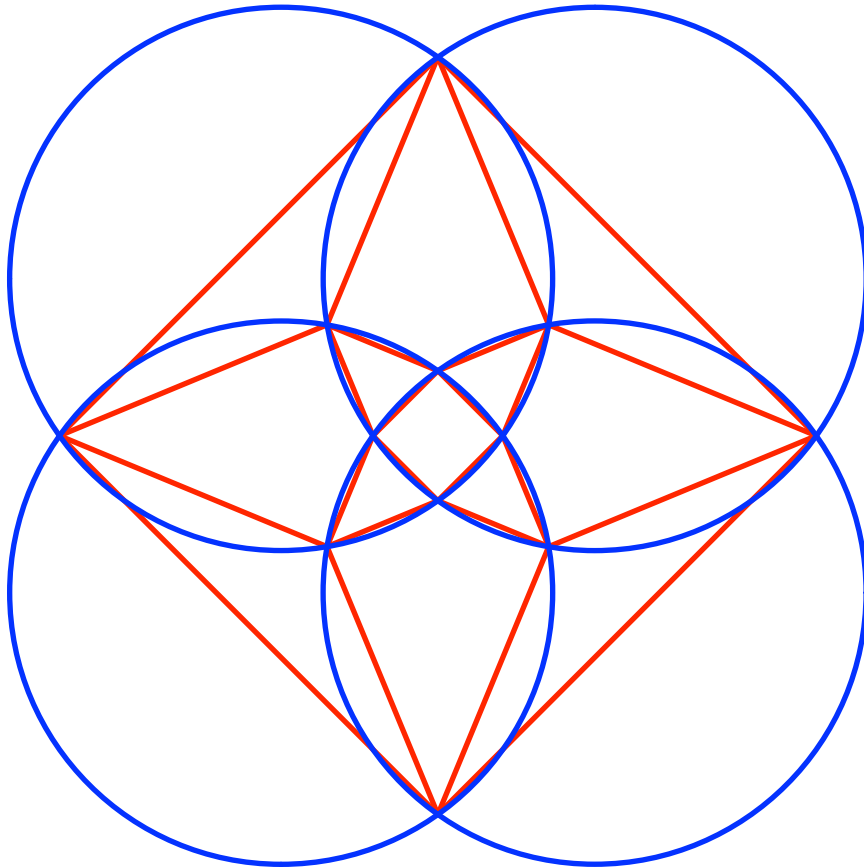


Abb. 9: Entwicklung des Kreisdiagramms

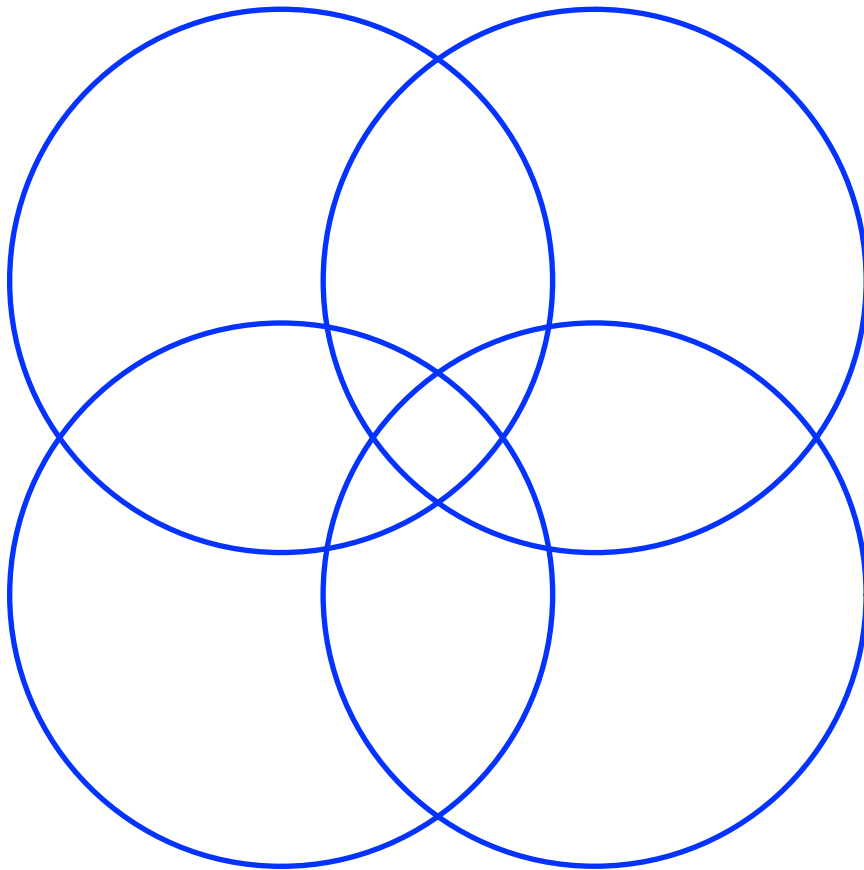


Abb. 10: Stereografische Projektion

Die Abbildung 11 schließlich die Überlagerung mit Stern und Achteck.

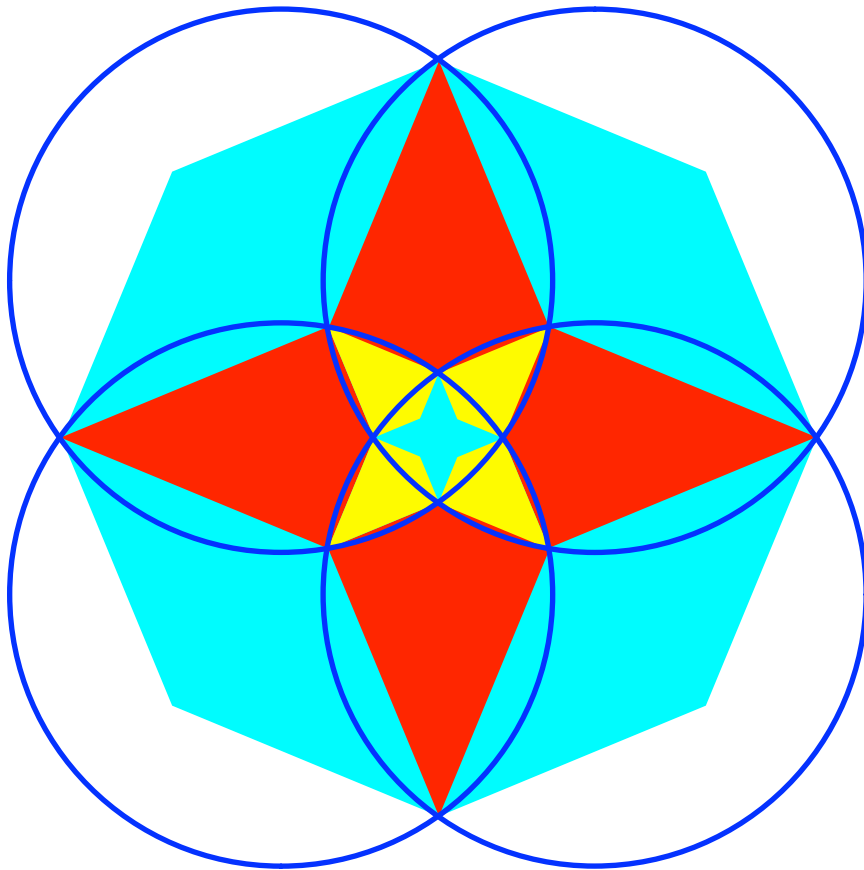


Abb. 11: Überlagerung

2.2 Zweite Lösung

Wir stellen das Kuboktaeder auf eine Dreiecksseite (Abb. 12).

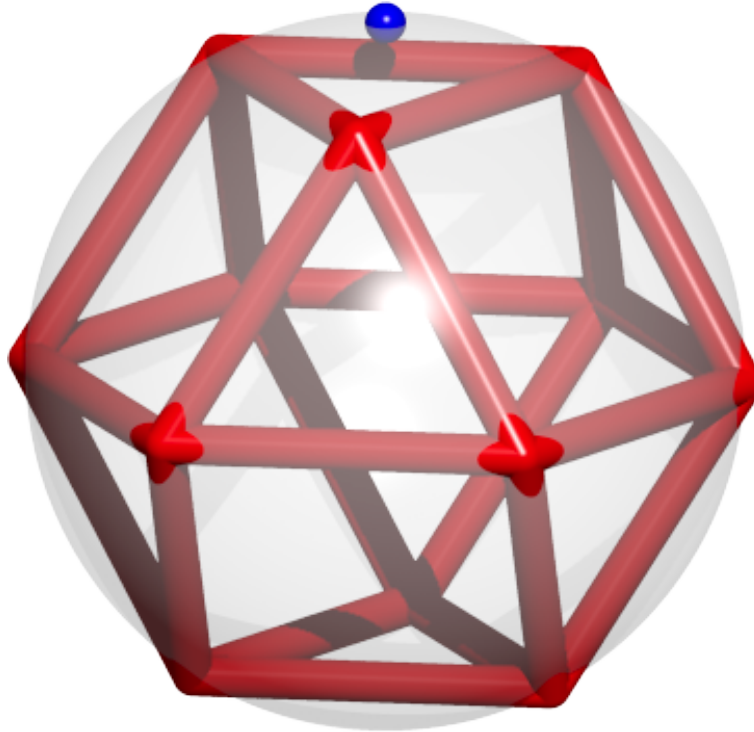


Abb. 12: Kuboktaeder auf Dreiecksseite

Die Abbildung 13 zeigt die entsprechende Projektion.

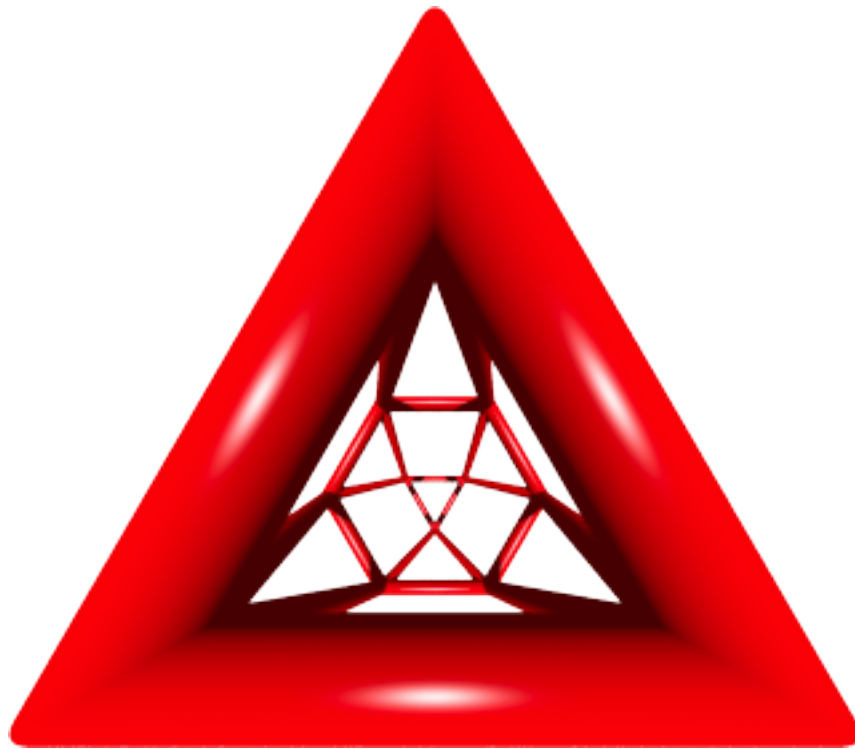


Abb. 13: Stereografische Projektion

Die Abbildung 14 zeigt die Liniendarstellung. Sie wurde recht mühsam mit Methoden der darstellenden Geometrie erarbeitet. Man beachte das regelmäßige Sechseck im Innern.

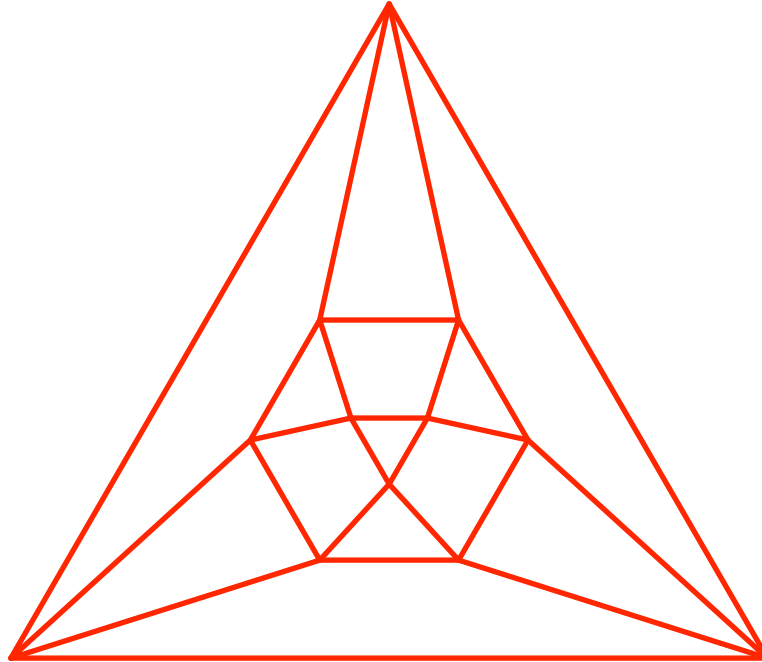


Abb. 14: Liniendarstellung

Die Abbildungen 15 und 16 zeigen die Entwicklung des Kreisdiagramms aus der Liniendarstellung.

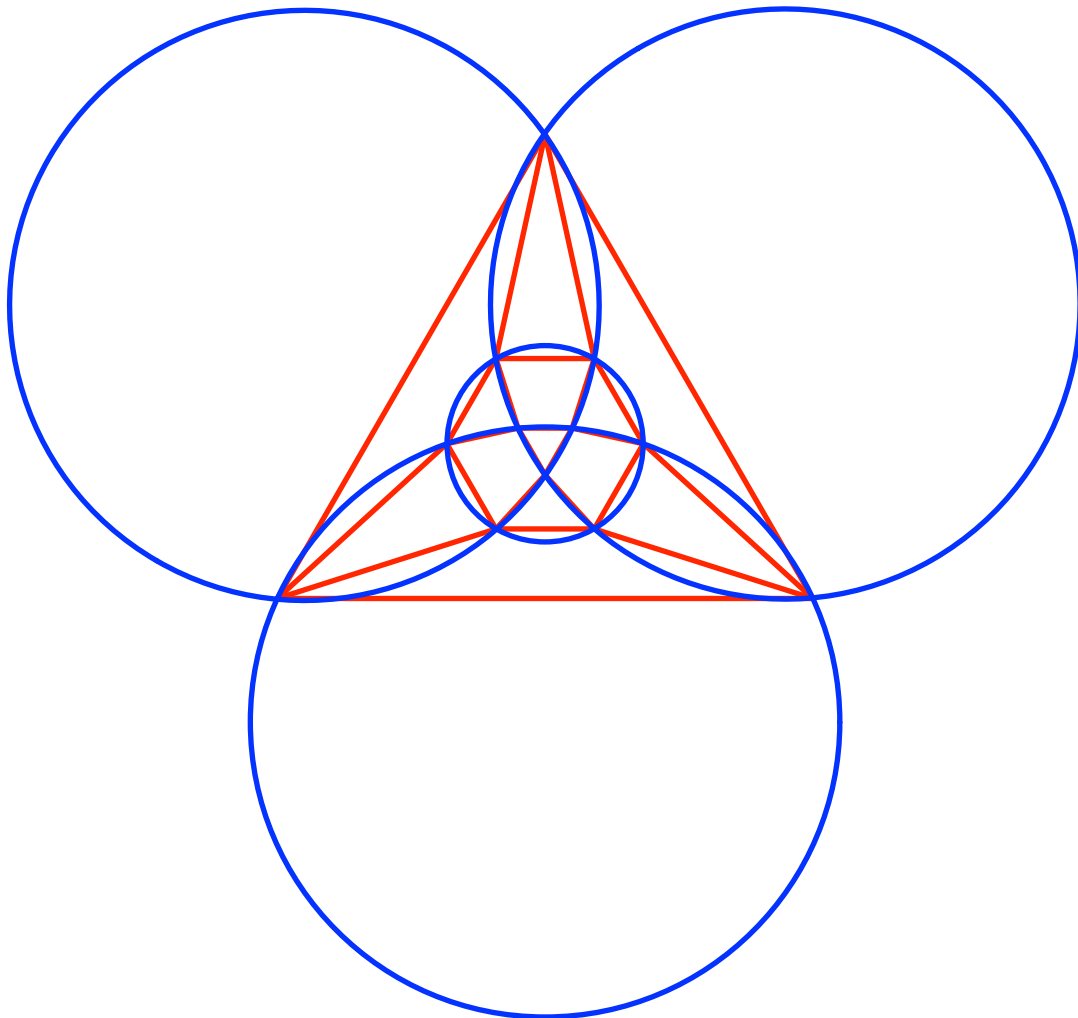


Abb. 15: Entwicklung des Kreisdiagramms

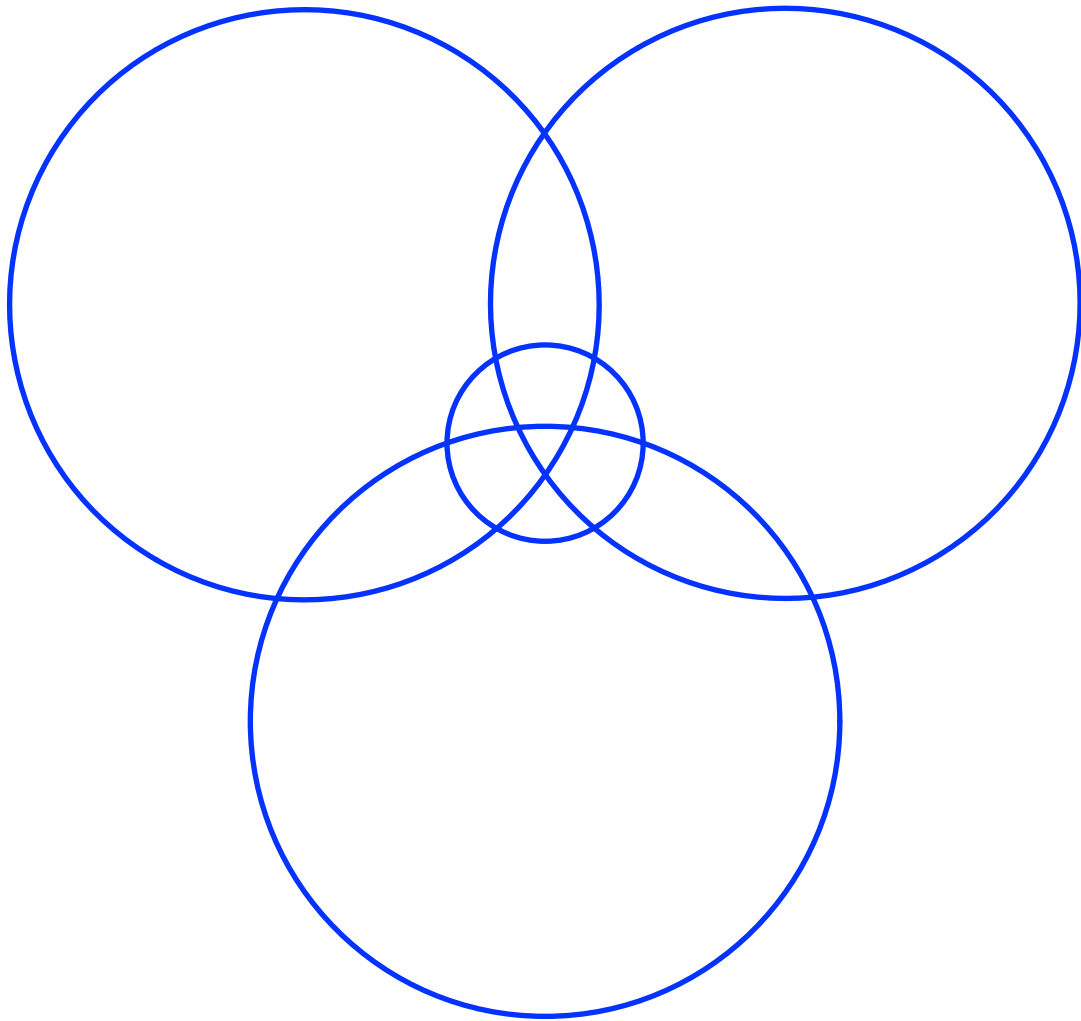


Abb. 16: Stereografische Projektion

Wir können die Kreise der Abbildung 16 und damit auch die Liniendarstellung der Abbildung 14 auch direkt planimetrisch zeichnen. Das geht wie folgt.

In ein DIN-Rechteck (Walser 2013) zeichnen wir den Kantenmittenrhombus (Abb. 17.1). Der spitze Winkel dieses Rhombus ist der kristallografische Winkel (1). Das erklärt die Stimmigkeit der nachfolgenden Konstruktion.

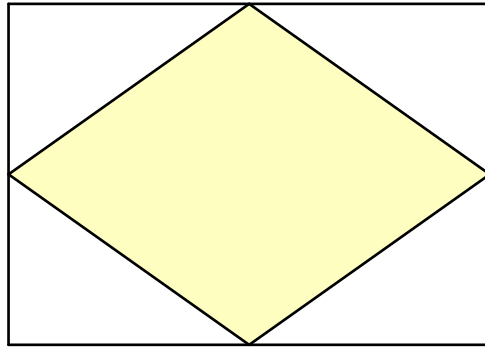


Abb. 17.1: Rhombus im DIN-Rechteck

Wir fügen die langen Diagonalen von drei solchen Rhomben zu einem gleichseitigen Dreieck zusammen (Abb. 17.2).

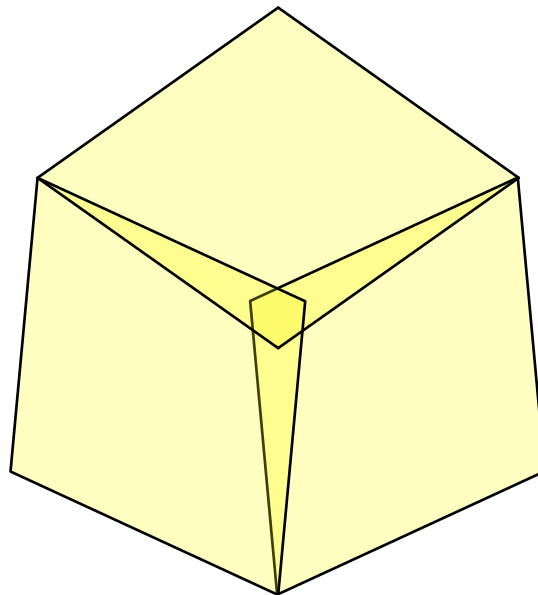


Abb. 17.2: Rhombendreieck

Wir erhalten ein gleichseitiges, aber nicht gleichwinkliges Sechseck. Wir können nun die drei großen Kreise der Abbildung 16 zeichnen (Abb. 17.3).

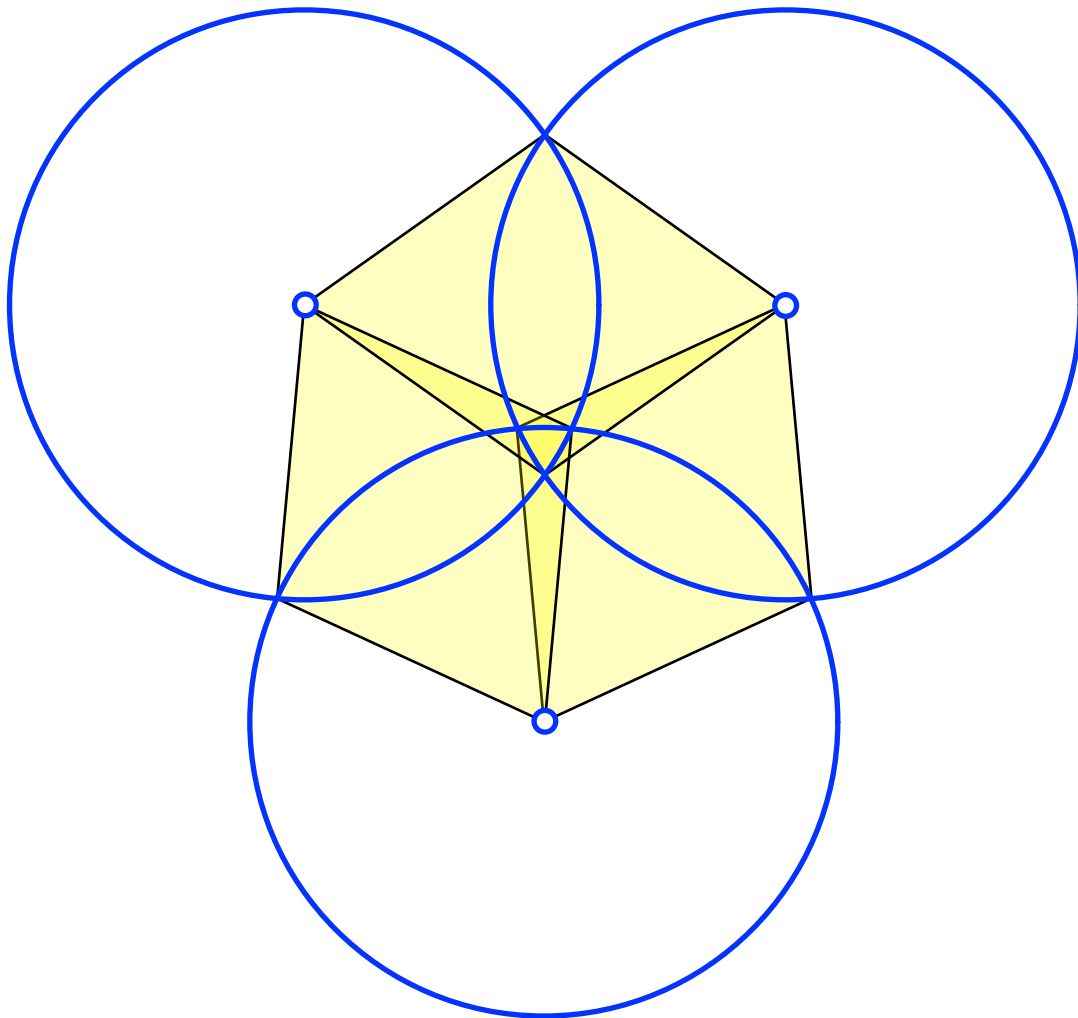


Abb. 17.3: Die drei großen Kreise

Wir zeichnen den Mittelpunkt der Figur und passen einen Propeller aus drei gleichseitigen Dreiecken ein. So finden wir den vierten Kreis (Abb. 17.4).

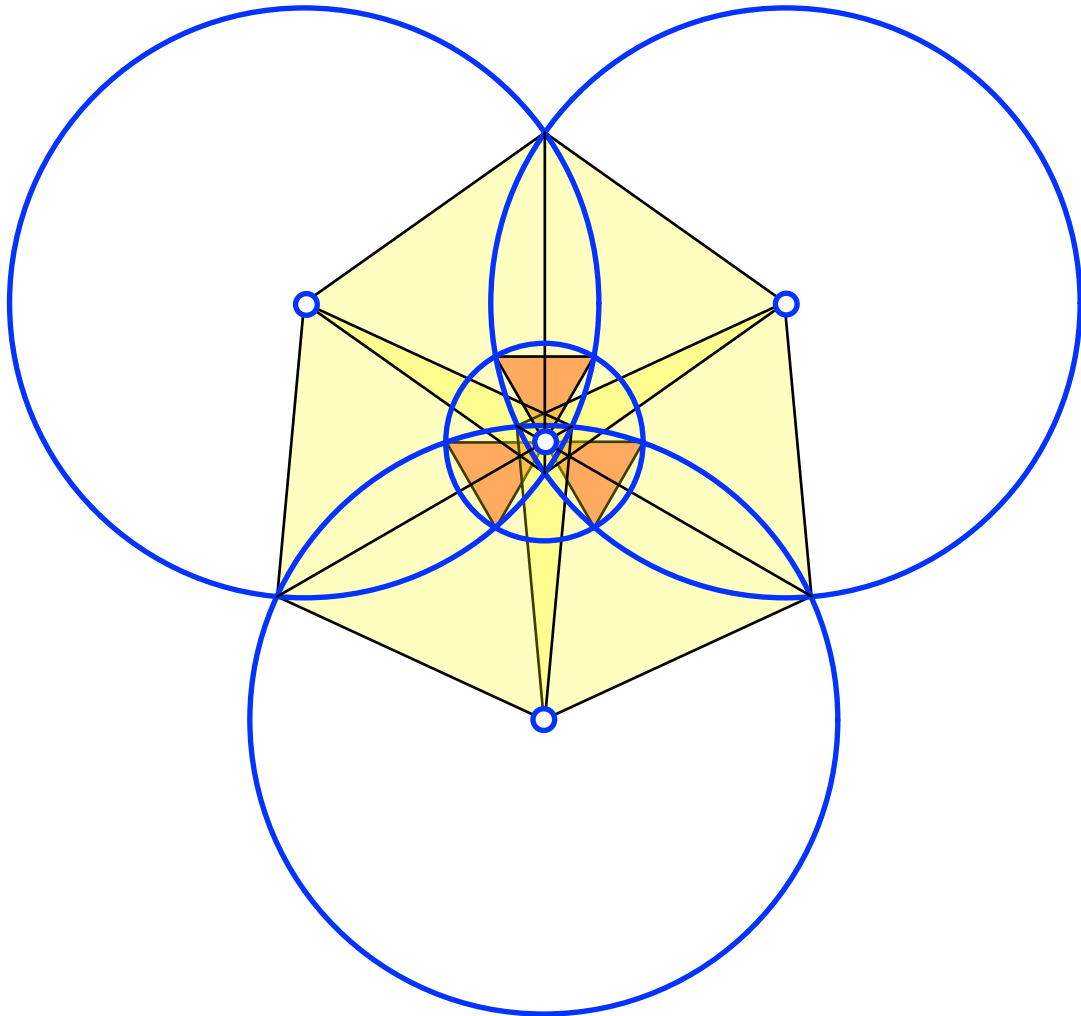


Abb. 17.4: Der vierte Kreis

Literatur

Walser, Hans (2013): DIN A4 in Raum und Zeit. Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig 2013. ISBN 978-3-937219-69-1.

Websites

Hans Walser: Kuboktaeder-Kantenmodell

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kuboktaeder-Kantenmodell/Kuboktaeder-Kantenmodell.htm>

Hans Walser: Kugelmodelle aus Großkreisen

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kugelmodelle/Kugelmodelle.htm>

Hans Walser: Stereografische Projektion

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Stereo_Proj_3/Stereo_Proj_3.htm