

Hans Walser, [20190810]

## Kreisspiegelung

Anregung: Borges 2019

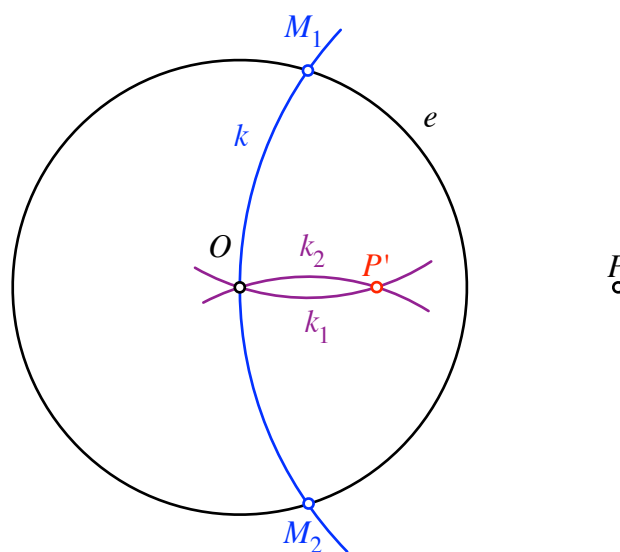
### 1 Worum geht es?

Rechnerische Lösung für eine Kreisspiegelung nur mit dem Zirkel.

### 2 Kreisspiegelung nur mit dem Zirkel

Borges 2019 beschreibt einen Konstruktionsvorgang der Kreisspiegelung nur mit dem Zirkel. Er geht wie folgt (Abb. 1).

Es sei  $e$  der Inversionskreis,  $O$  dessen Mittelpunkt und  $P$  der zu spiegelnde Urbildpunkt.



**Abb. 1: Konstruktionsvorgang mit dem Zirkel allein**

Wir schneiden den Kreis  $k$  um  $P$  durch  $O$  mit dem Inversionskreis  $e$  und erhalten die beiden Schnittpunkte  $M_1$  und  $M_2$ .

Weiter zeichnen wir die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  um  $M_1$  beziehungsweise  $M_2$  durch  $O$ .

Der zweite Schnittpunkt dieser beiden Kreise ist der gesuchte Bildpunkt  $P'$ .

Die Stimmigkeit dieser Konstruktion ergibt sich aus dem Nachfolgenden.

### 3 Diskussion

Wenn der Abstand des Urbildpunktes  $P$  von  $O$  kleiner ist als der halbe Radius des Inversionskreises  $e$ , schneiden sich  $e$  und  $k$  nicht.

Man kann die Sache retten, indem man den Urbildpunkt um ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches seines Abstandes von  $O$  entfernt (Hilfspunkt  $Q$ ), den Hilfspunkt  $Q$  spiegelt und den Spiegelpunkt  $Q'$  um dasselbe ganzzahlige Vielfache von  $O$  entfernt. Die ganzzahligen Vielfachen können mit einem Raster aus gleichseitigen Dreiecken mit dem Zirkel allein konstruiert werden.

Dieses Konstruktionsverfahren mit der Hilfskonstruktion ist nicht Zugmodus-resistent. Wir wissen ja zum vorneherein nicht welches Vielfache benötigt wird. Es gibt daher keine Konstruktionsbeschreibung für dieses Verfahren mit einer festen Anzahl Konstruktionschritten.

Randbemerkung: Wenn Zirkel *und* Lineal zugelassen sind, gibt es mehrere Zugmodus-resistente Verfahren ohne Fallunterscheidung hinsichtlich der Lage von  $P$ .

#### 4 Rechnerische Lösung

Wir arbeiten statt auf dem Papier im Modell der Koordinatengeometrie. Da wir nur den Zirkel benützen dürfen, heißt das, dass wir nur die Kreisgleichung verwenden dürfen. In diesem Modell arbeiten wir nach dem oben geschilderten Verfahren.

Gegeben sei also der Inversionskreis  $e$  und der Urbildpunkt  $P$ . Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Inversionskreis  $e$  der Einheitskreis ist und der Urbildpunkt  $P$  die Koordinaten  $P = (p, 0)$ ,  $p > 0$ , hat.

Und jetzt frisch drauflos.

Inversionskreis  $e$ :

$$e: x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

Kreis  $k$ :

$$k: (x - p)^2 + y^2 = p^2 \quad (2)$$

Das durch (1) und (2) gegebene quadratische Gleichungssystem hat, wie man durch Einsetzen sofort verifiziert, die Lösungen:

$$M_{1,2} = \left( \frac{1}{2p}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4p^2}} \right) \quad (3)$$

Kreise  $k_1$  und  $k_2$ :

$$k_1: \left( x - \frac{1}{2p} \right)^2 + \left( y - \sqrt{1 - \frac{1}{4p^2}} \right)^2 = 1 \quad (4)$$

$$k_2: \left( x - \frac{1}{2p} \right)^2 + \left( y + \sqrt{1 - \frac{1}{4p^2}} \right)^2 = 1 \quad (5)$$

Das durch (4) und (5) gegebene quadratische Gleichungssystem hat die beiden Lösungen:

$$(0,0) = O \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{1}{p}\right) = P' \quad (6)$$

Voilà. Damit ist auch die Stimmigkeit der oben im Papiermodell durchgeführten Konstruktion bewiesen.

## 5 Nochmals Diskussion

In (3) erhalten wir für  $p < \frac{1}{2}$  rein imaginäre  $y$ -Koordinaten der beiden Lösungen. Entsprechend sind auch die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  nicht reell sichtbar. Ihre beiden Schnittpunkte sind aber reell. Nach dem finsternen Korridor kommen wir wieder ans reelle Licht. Das Verfahren ist also unabhängig von der Größe von  $p$  und damit Zugmodus-resistent.

## Literatur

Borges, Florian 2019: Großes Sparpotenzial in der Mathematik wiederentdeckt: Geometrie mit dem Zirkel und *ohne* Lineal. MNU Journal – Ausgabe 04.2019 – ISSN 0025-5866.

## Website

Hans Walser: Kreisspiegelung

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/K/Kreisspiegelung2/Kreisspiegelung2.htm>