Hans Walser, [20190803]

Kreisspiegelung

Anregung: Borges 2019

1 Worum geht es?

Variante zu einem Konstruktionsvorgang bei der Kreisspiegelung.

2 Normierung

Wir wählen ein allfälliges Koordinatensystem jeweils so, dass der Spiegelkreis k der Einheitskreis ist und der zu spiegelnde Punkt P auf der positiven x-Achse.

3 Von innen nach außen

Ein Urbildpunkt P im Innern des Spiegelkreises k soll nach außen gespiegelt werden.

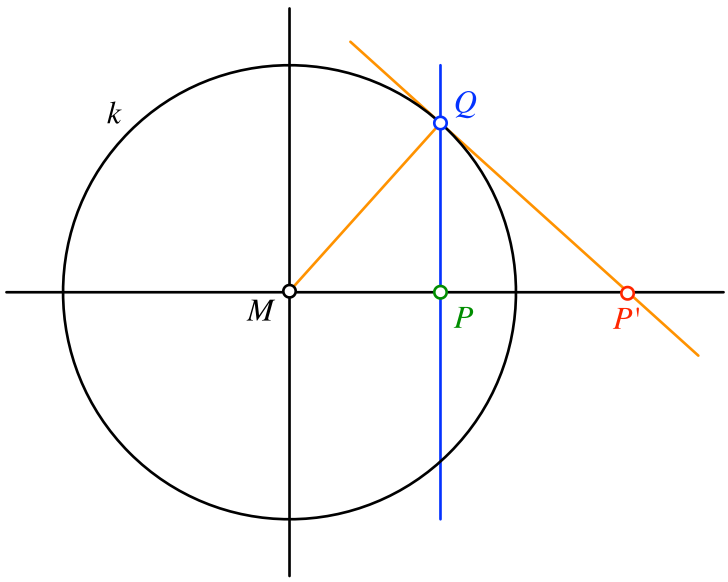

Abb. 1: Konstruktion des Spiegelpunktes

Die Abbildung 1 zeigt ein mögliches Konstruktionsverfahren. Die Senkrechte durch den Urbildpunkt P wird mit dem Spiegelkreis k geschnitten. Im Schnittpunkt Q zeichnen wir die Tangente an den Spiegelkreis k und schneiden diese mit der Geraden MP (also mit der x-Achse). Der Schnittpunkt ist der gesuchte Bildpunkt P'.

4 Konstruktionseinschränkung

Das Verfahren funktioniert nur, wenn sich der Urbildpunkt P im Innern des Spiegelkreises k befindet. Es gibt Konstruktionsverfahren, welche keine solche Einschränkung kennen (Abb. 2).

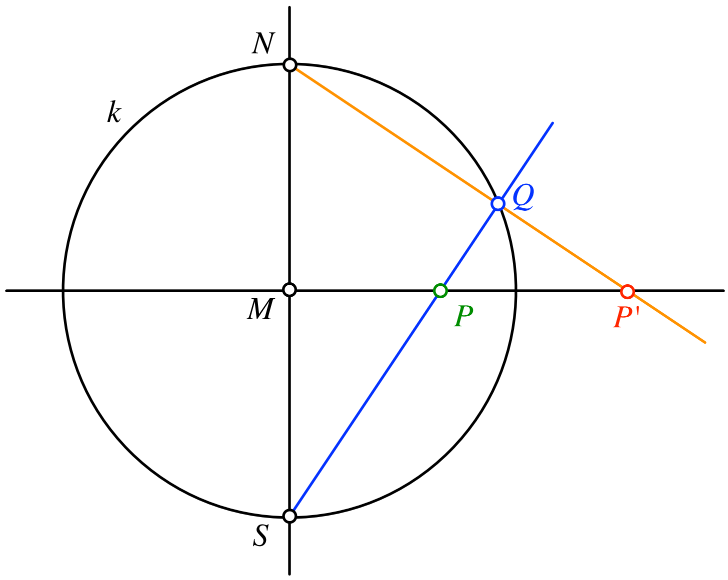

Abb. 2: Anderes Verfahren

5 Mittelsenkrechte

Wir modifizieren das Verfahren der Abbildung 1, indem wir mit Mittelsenkrechten arbeiten (Abb. 3).

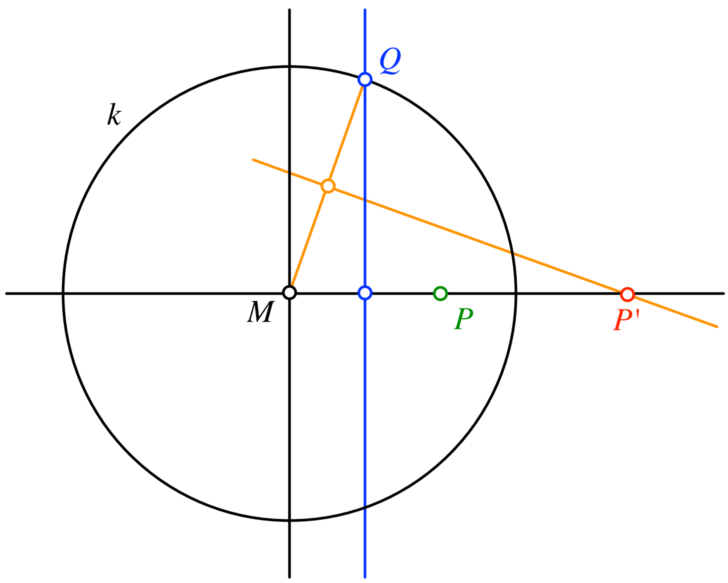

Abb. 3: Verfahren mit Mittelsenkrechten

Wir schneiden die Mittelsenkrechte von *MP* mit dem Spiegelkreis *k*. Dies ergibt den Schnittpunkt *Q*. Nun schneiden wir die Mittelsenkrechte von *MQ* mit der Geraden *MP* und erhalten so den Bildpunkt *P'*. Beweis folgt.

Dieses Verfahren hat eine größere Reichweite. Der Urbildpunkt *P* kann jetzt auch außerhalb des Spiegelkreises liegen, allerdings nur innerhalb des Kreises mit dem doppelten Radius des Spiegelkreises.

6 Drittelsenkrechte

Oh je, oh je, der Begriff *Drittelsenkrechte* fehlt im Kanon von Lehrer Lämpel. Zudem gibt es zwei Versionen (Abb. 4 und 5). Da ist Sprachkompetenz angesagt.

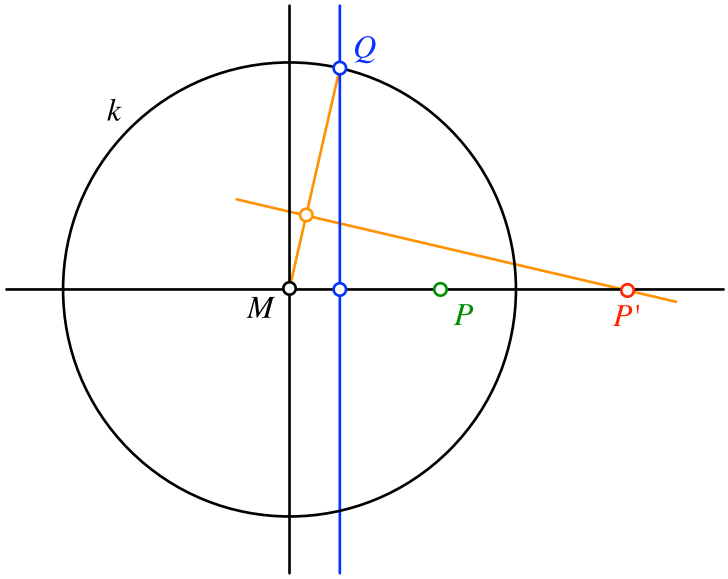

Abb. 4: Die eine Drittelsenkrechte

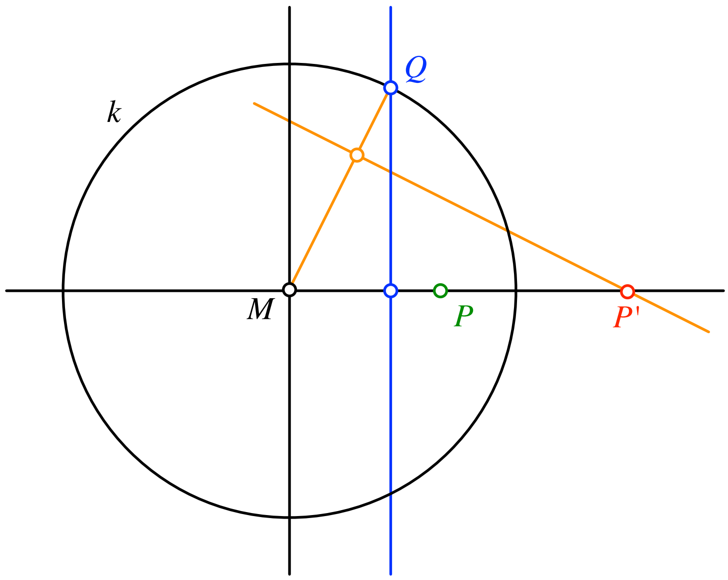

Abb. 5: Die andere Drittelsenkrechte

Wie steht es mit den Reichweiten dieser Konstruktionen?

7 Allgemeiner Fall. Beweis

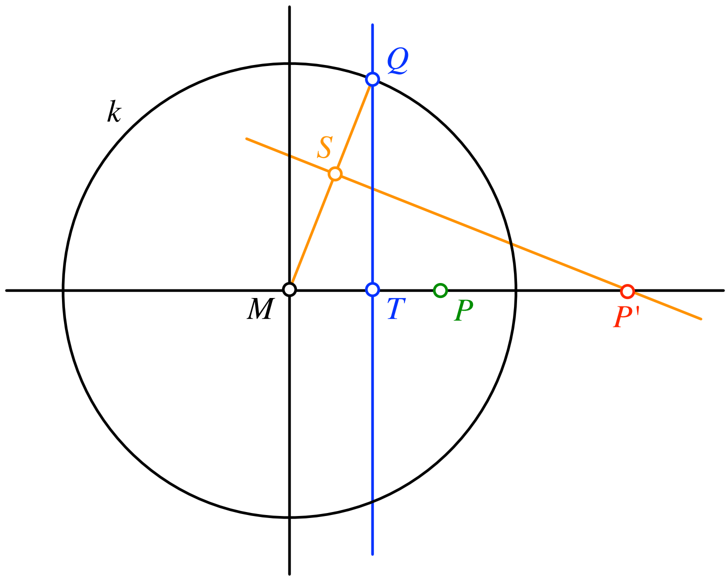

Abb. 6: Allgemeiner Fall

Wir strecken den Urbildpunkt P vom Kreismittelpunkt M aus mit dem Faktor t. In der Abbildung 6 wurde exemplarisch $t = 0.55$ gewählt. Der Faktor t kann aber auch größer als 1 oder negativ gewählt werden. Durch diese Streckung erhalten wir den Punkt *T*. Die Senkrechte durch *T* schneiden wir mit dem Spiegelkreis *k* in *Q*. Nun strecken wir *Q* von *M* aus mit demselben Faktor *t* und zeichnen im Bildpunkt *S* die Senkrechte zu *MQ*. Diese schneiden wir mit der Geraden *MP* und erhalten so *P'*.

Wir müssen nun zeigen, dass *P'* der Spiegelpunkt von *P* bei der Kreisspiegelung an *k* ist. Dazu zeichnen wir noch die Tangente in *Q* an *k* ein und schneiden diese mit *MP* in *T'*. Gemäß dem Verfahren der Abbildung 1 ist *T'* der Bildpunkt von *T* bei der Kreisspiegelung an *k*.

Die Geraden *SP'* und *QT'* sind beide senkrecht zu *MQ* und daher untereinander parallel. Wir können also die Strahlensätze anwenden.

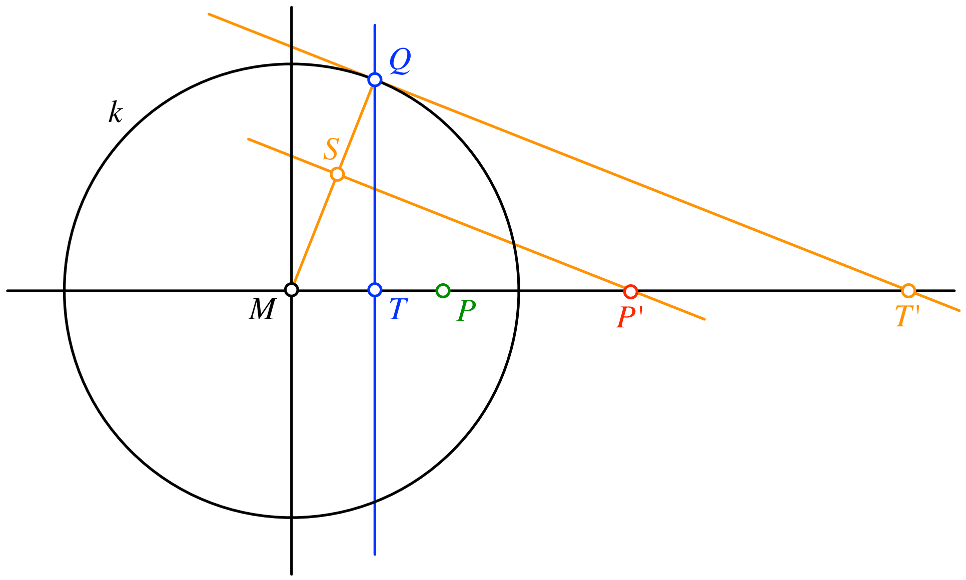

Abb. 7: Beweisfigur

Der Beweis geht nun rechnerisch. Wir setzen $P = (p,0)$. Wegen der Streckung ist $T = (tp,0)$. Wegen der Kreisspiegelung ist $T' = \left(\frac{1}{tp},0\right)$. Und wegen dem Strahlensatz schließlich $P' = \left(t\frac{1}{tp},0\right) = \left(\frac{1}{p},0\right)$. Damit ist *P'* tatsächlich das Spiegelbild von *P* bei der Kreisspiegelung an *k*.

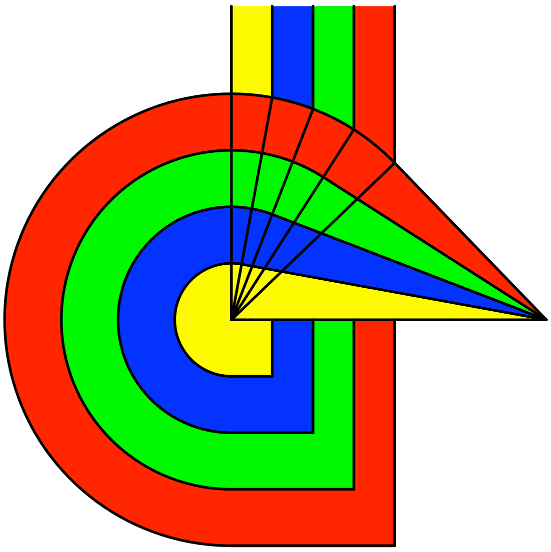

Abb. 8: Viertelsenkrechte

Literatur

Borges, Florian 2019: Großes Sparpotenzial in der Mathematik wiederentdeckt: Geometrie mit dem Zirkel und *ohne* Lineal. MNU Journal – Ausgabe 04.2019 – ISSN 0025-5866.