Hans Walser, [20210118]

Konchoide

1 Worum geht es?

Herleitung einer Konstruktion für die Tangenten und Normalen an eine Konchoide. Dabei wird vorausgesetzt, dass wir die Tangennte und die Normalen an die Leitkurve kennen.

2 Konchoide

Wir gehen von einer Leitkurve mit der Polardarstellung

$$r(t) = f(t) \tag{1}$$

aus. Dabei bezeichnet t den Polarwinkel. Den Pol der Konchoiden legen wir in den Ursprung.

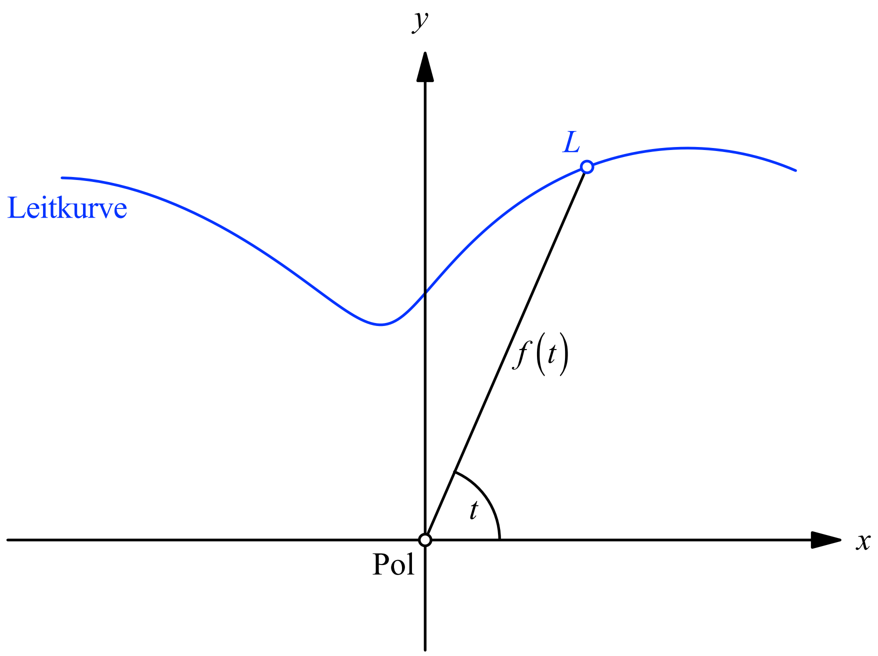

Abb. 1: Leitkurve

Die Konchoide (Abb. 2) mit dem äußeren und dem inneren Ast, genannt Konchoide$_1$ beziehungsweise Konchoide$_2$ hat die Polardarstellung:

$$r(t) = f(t) \pm b \tag{2}$$

Dabei ist b der vom Pol aus gesehene Abstand der Konchoide von der Leitkurve.

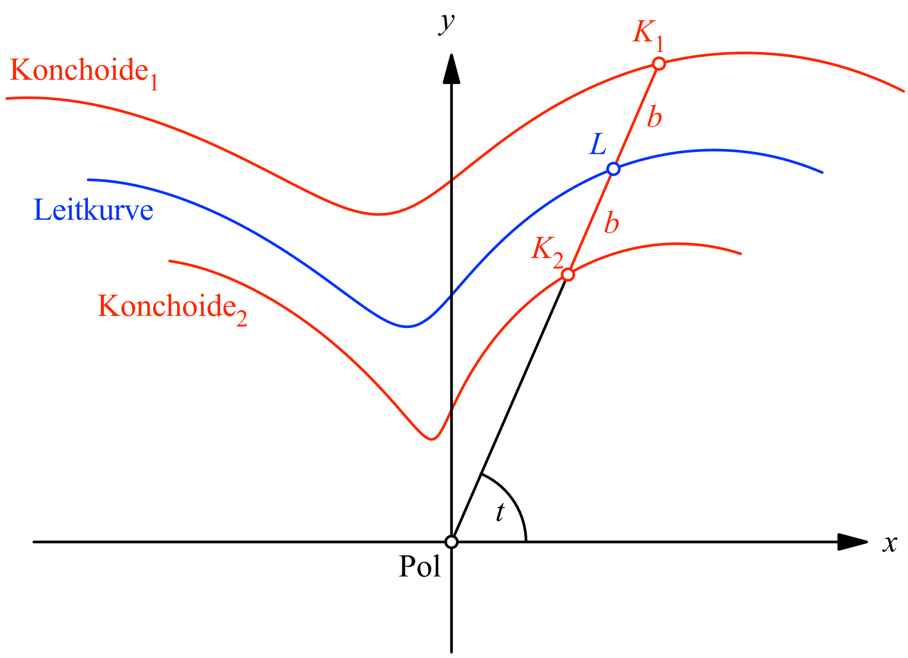

Abb. 2: Konchoide

3 Tangenten und Normalen

Zur Berechnung der Tangenten und Normalen verwenden wir die aus (1) und (2) abgeleiteten kartesischen Darstellungen.
Für die Leitkurve also:

$$f(t)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Somit hat die Leitkurve den Tangentialvektor

$$f'(t)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + f(t)\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

und den Normalvektor:

$$f'(t)\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + f(t)\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Für die Konchoide ergibt sich die kartesische Darstellung:

$$\left(f(t) \pm b\right)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

Für den Tangentialvektor erhalten wir

$$f'(t)\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + \left(f(t) \pm b\right)\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

und für den Normalvektor:

$$f'(t)\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix} + \left(f(t) \pm b\right)\begin{bmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

4 Ein Schnittpunkt

Die Normalvektoren der Leitkurve und der Konchoide haben dieselbe erste Komponente. Die zweite Komponente ist das Negative der jeweiligen Polardarstellung.

Damit ergibt sich die Stimmigkeit der Abbildung 3.

Die Normalen an Leitkurve und Konchoide sowie die Normale zur Polgerade mit dem Steigungswinkel t haben den Punkt N gemeinsam.

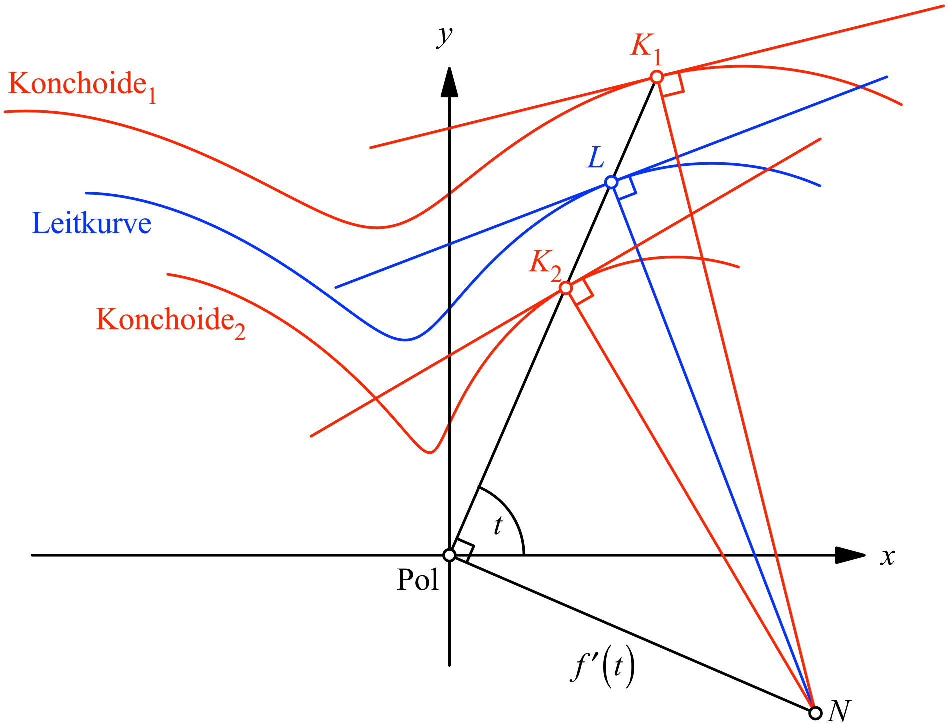

Abb. 3: Gemeinsamer Schnittpunkt der Normalen

5 Konstruktives Vorgehen

Wir beginnen mit Tangente und Normale der Leitkurve, deren Kenntnis wir vorausgesetzt haben. Damit können wir den Punkt N konstruieren (Abb. 4).

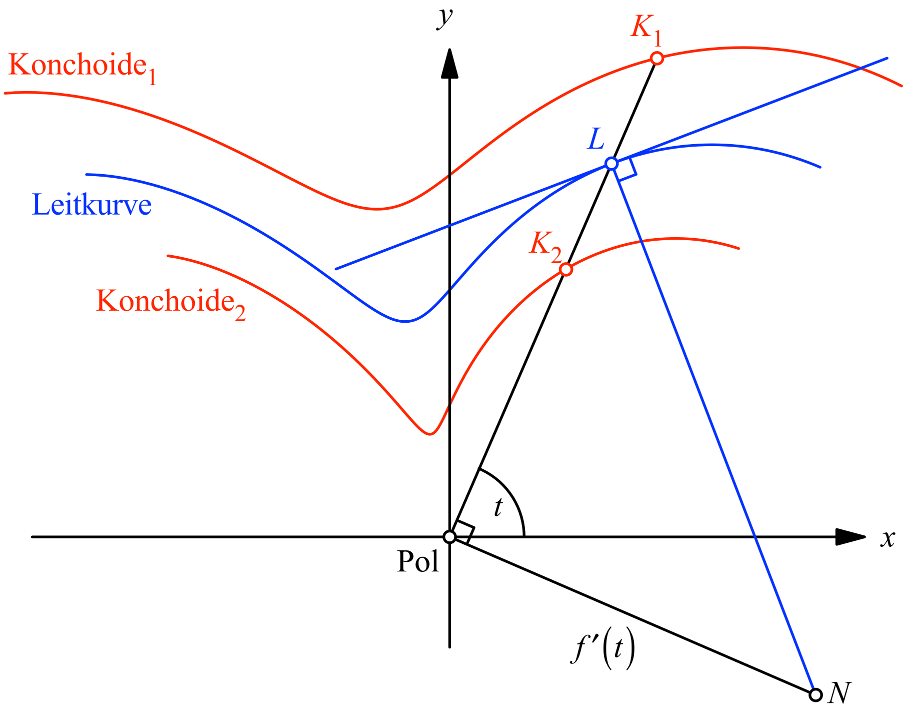

Abb. 4: Erster Schritt

Anschließend können wir Normalen und Tangenten an die Konchoide konstruieren gemäß Abbildung 3.

6 Beispiele

6.1 Konchoide von Nikomedes

Die Leitkurve ist eine Gerade (Abb. 5). Daher können Normale und Tangente mit elementaren Mitteln gezeichnet werden.

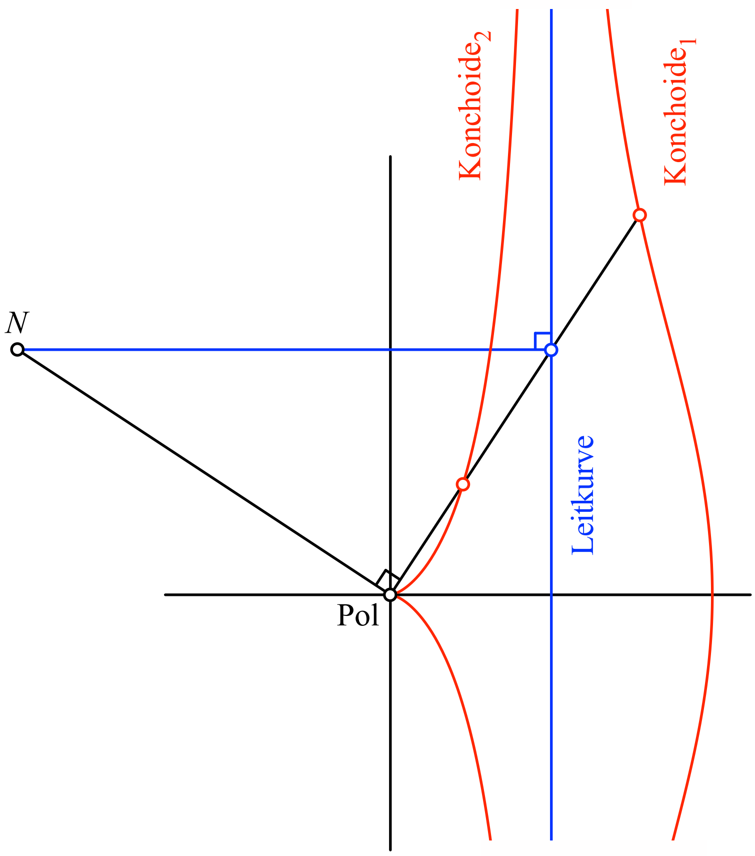

Abb. 5: Nikomedes. Erster Schritt

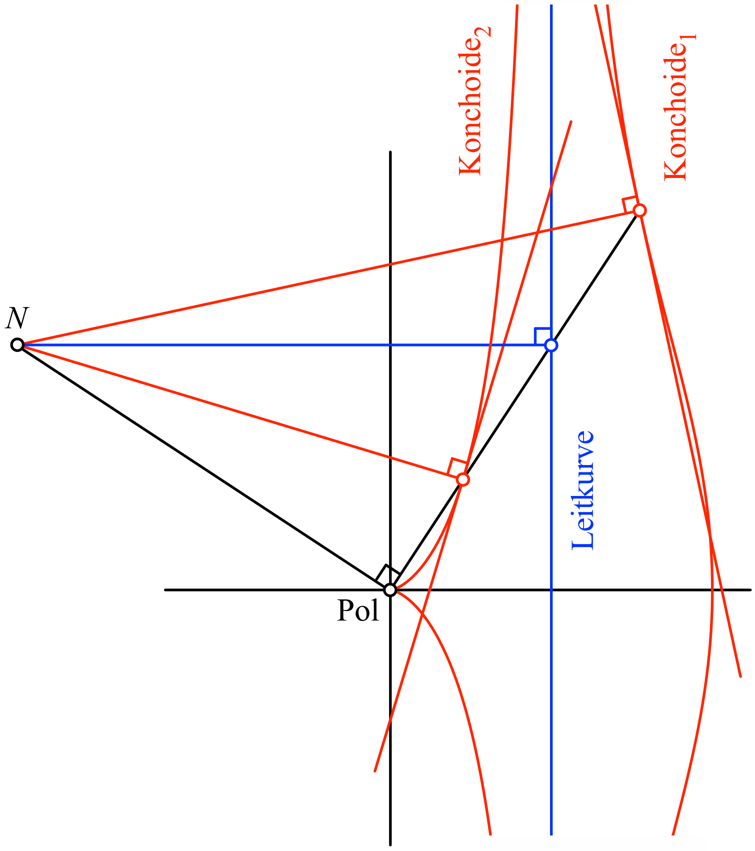

Abb. 6: Normalen und Tangenten

6.2 Pascalsche Schnecke

Bei der Pascalschen Schnecke (Abb. 7) (Étienne Pascal, 1588-1651, Vater von Blaise Pascal) ist die Leitkurve ein Kreis. Daher können Normale und Tangente mit elementaren Mitteln gezeichnet werden. Die äußere und die innere Konchoide schließen zu einer durchgehenden Kurve. Die Übergangsstellen sind auf der Senkrechten zur Symmetrieachse durch den Pol.

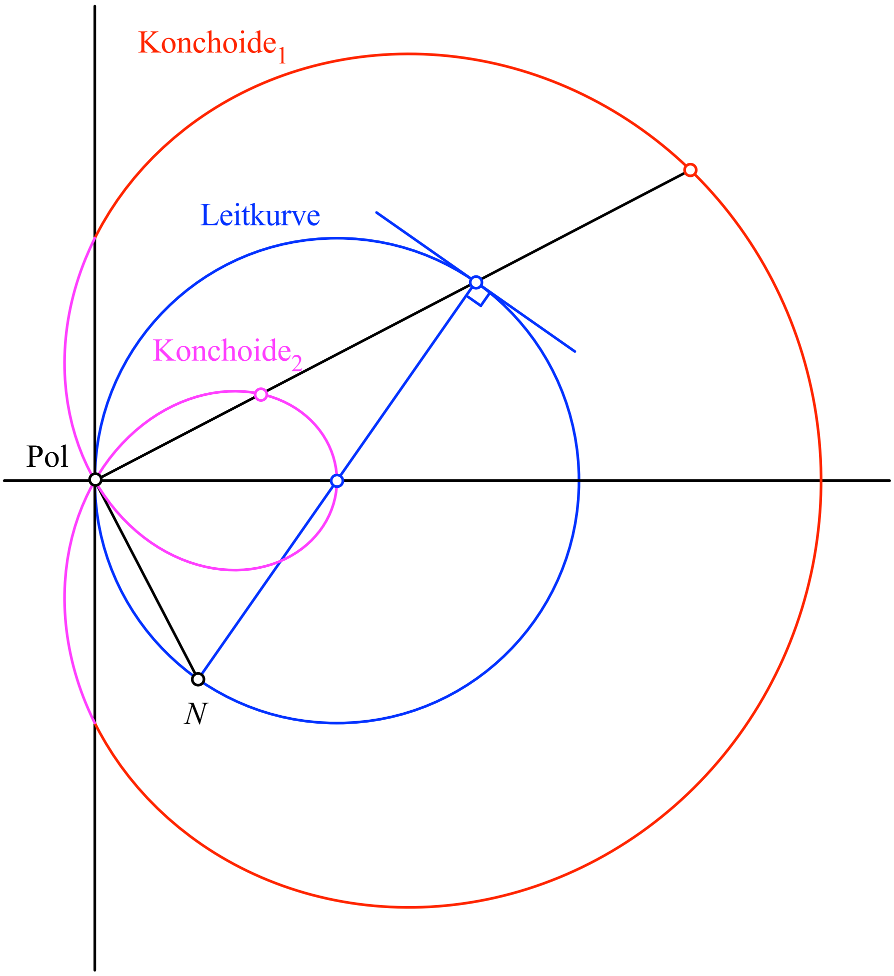

Abb. 7: Pascalsche Schnecke. Erster Schritt

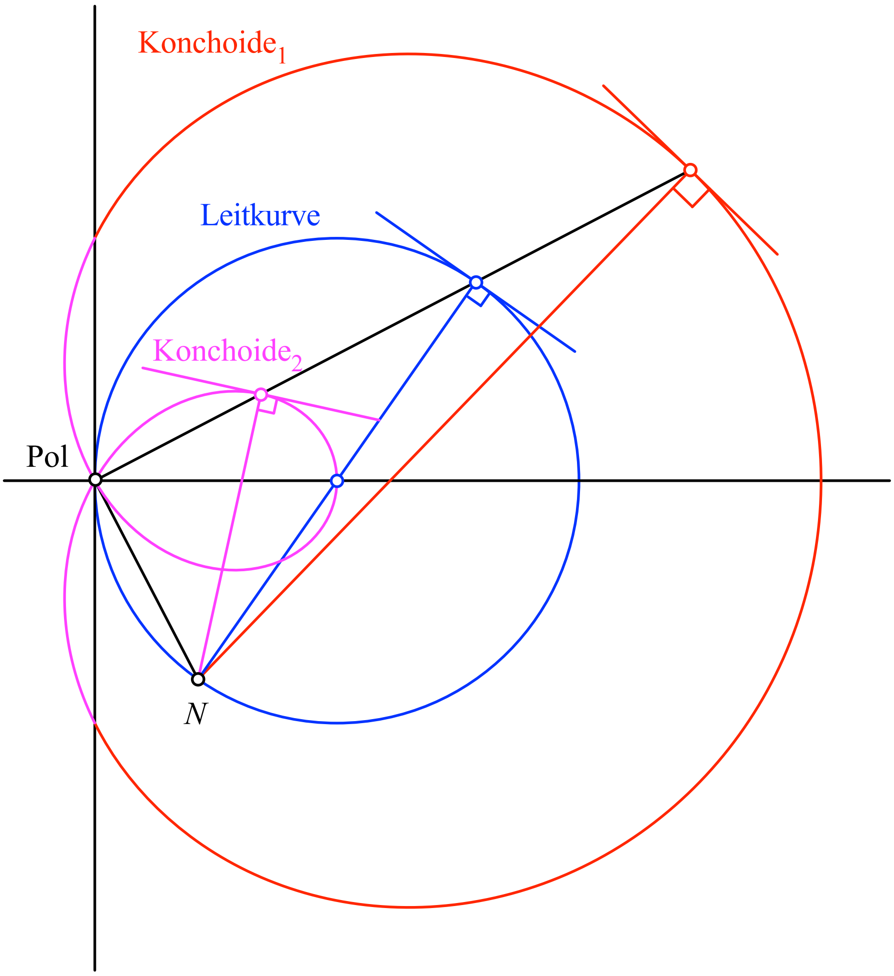

Abb. 8: Normalen und Tangenten

6.3 Archimedische Spirale

Die archimedische Spirale (Abb. 9) ist eine Konchoide mit sich selbst als Leitkurve (Selbstkonchoidalität). Bei der Frage nach Normalen und Tangenten ist somit die Lösung das Problem.

Wir können aber rechnerisch vorgehen. Wir verwenden die Polargleichung:

$$r(t) = f(t) = at \tag{9}$$

Damit ist:

$$f'(t) = a \tag{10}$$

Das ist der Abstand des Punktes N vom Pol.

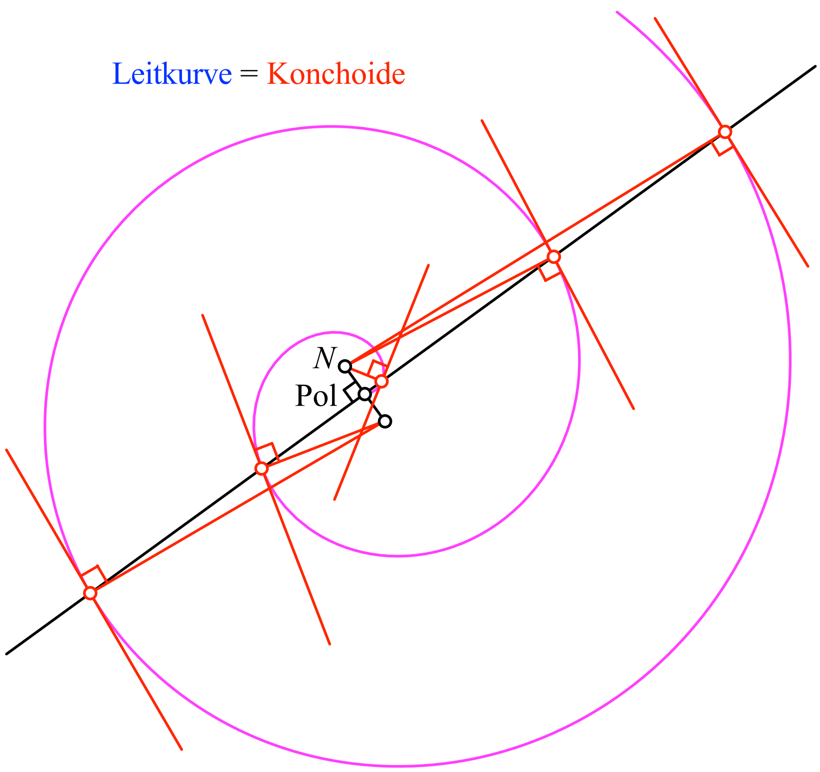

Abb. 9: Archimedische Spirale