Hans Walser, [20210717]

Kollineare Punkte

1 Worum geht es?

Aufbauend auf einer Fadengrafik finden wir kollineare Punkte.

2 Fadengrafik

In der Ebene der komplexen Zahlen beginnen wir mit zwei arithmetischen Folgen. Geometrisch sind dies gleichmäßig auf einer Strecke verteilte Punkte (Abb. 1.1).

Abb. 1.1: Arithmetische Folgen

Nun verbinden wir entsprechende Punkte und erhalten eine sogenannte *Fadengrafik* (Abb. 1.2).

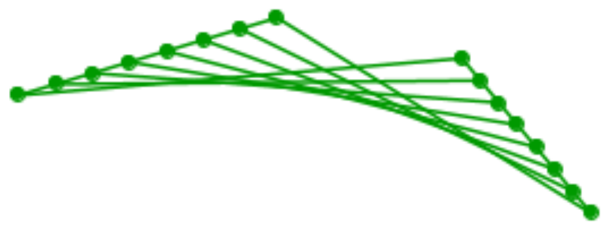

Abb. 1.2: Fadengrafik

Die Enveloppe ist eine Bézier-Kurve zweiten Grades, also eine Parabel.

3 Dreiecke aufsetzen

Wir setzen auf die Fäden gleichseitige Dreiecke (Abb. 2.1).

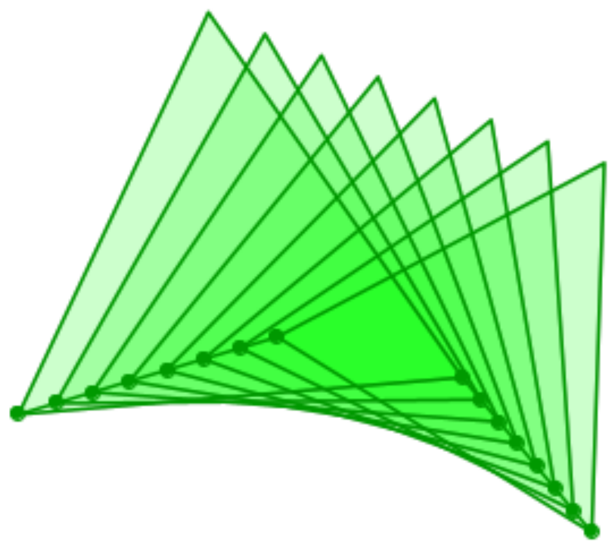

Abb. 2.1: Dreiecke aufsetzen

Wir stellen fest, dass die Spitzen auf einer Geraden liegen (Abb. 2.2).

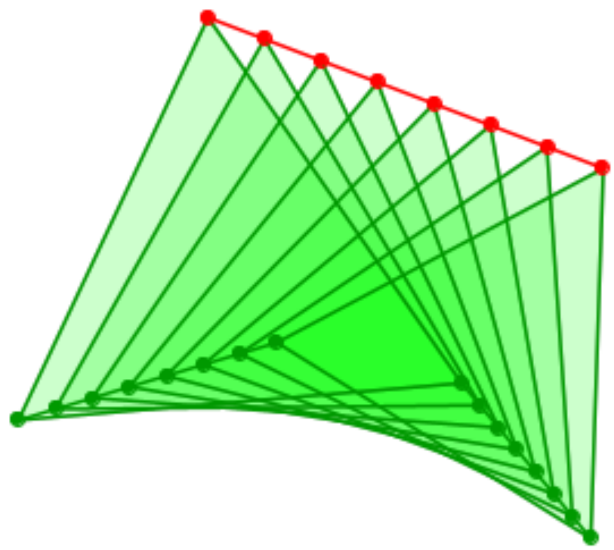

Abb. 2.2: Kollineare Punkte

4 Verallgemeinerung

Die Sache funktioniert auch mit Quadraten (Abb. 3) oder Fünfecken (Abb. 4). Wir erhalten sogar zwei beziehungsweise drei Scharen von kollinearen Punkten.

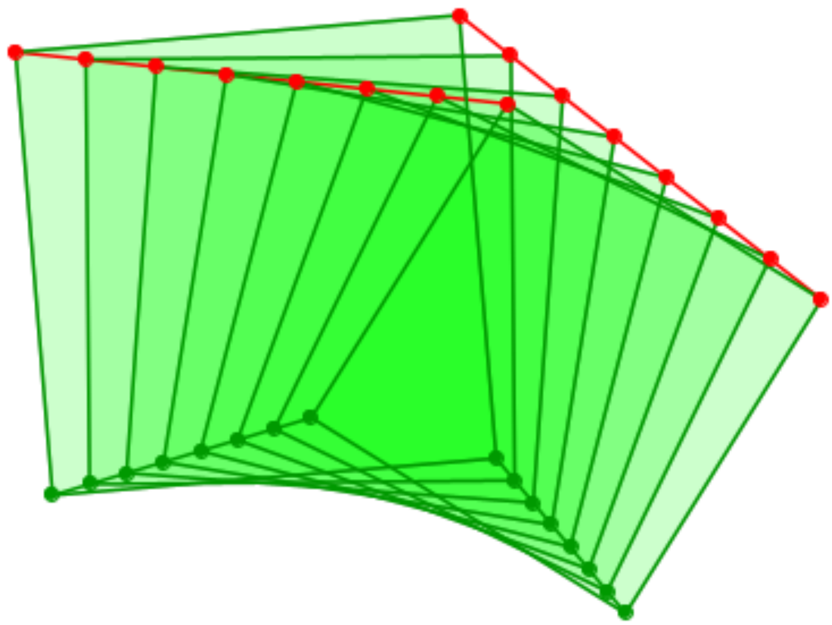

Abb. 3: Quadrate

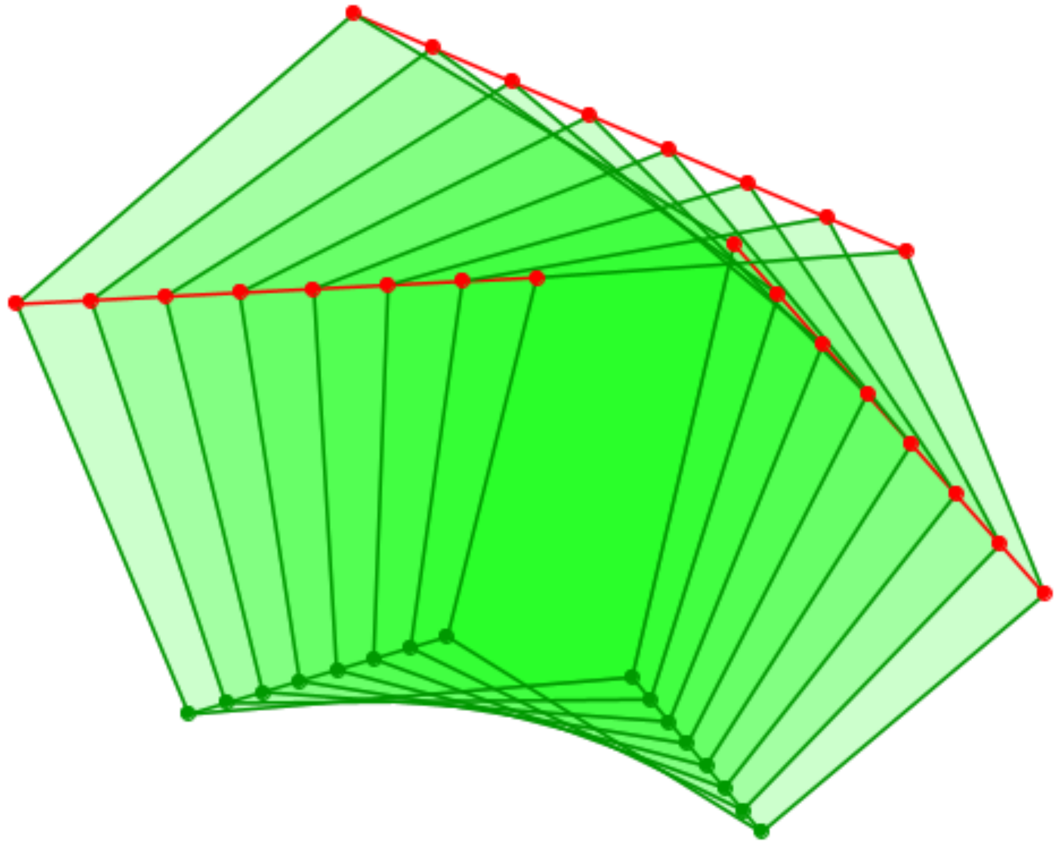

Abb. 4: Regelmäßige Fünfecke

5 Beweis

Der Beweis ist das hohe Lied der Linearität. Wir wählen die komplexen Zahlen a_0, p und b_0, q. Dann sind

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_0 + np \\ b_n = b_0 + nq \end{array}\right\} \quad n \in \{0,1,\ldots,N\} \tag{1}$$

je eine arithmetische Folge. Weiter setzen wir:

$$f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{6}} \tag{2}$$

Multiplikation mit f bedeutet geometrisch eine Drehung um 60°.
Die Spitze c_n des Dreiecks mit den Basisecken a_n und b_n finden wir als Linearkombination:

$$c_n = a_n + f\left(b_n - a_n\right) \tag{3}$$

Einsetzen von (1) in (3) ergibt:

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 + np + f\left(\left(b_0 + nq\right) - \left(a_0 + np\right)\right) \\ &= \underbrace{a_0\left(1-f\right) + f b_0}_{=c_0} + n\underbrace{\left(p\left(1-f\right) + fq\right)}_{=r} \end{aligned} \tag{4}$$

Wir erhalten also wieder eine arithmetische Folge. Dies war zu zeigen.

6 Allgemeines Dreieck

Wir können f durch eine beliebige komplexe Zahl ersetzen und erhalten so allgemeine Dreiecke. Für $f = 1 + 2i$ ergibt sich die Situation der Abbildung 5.

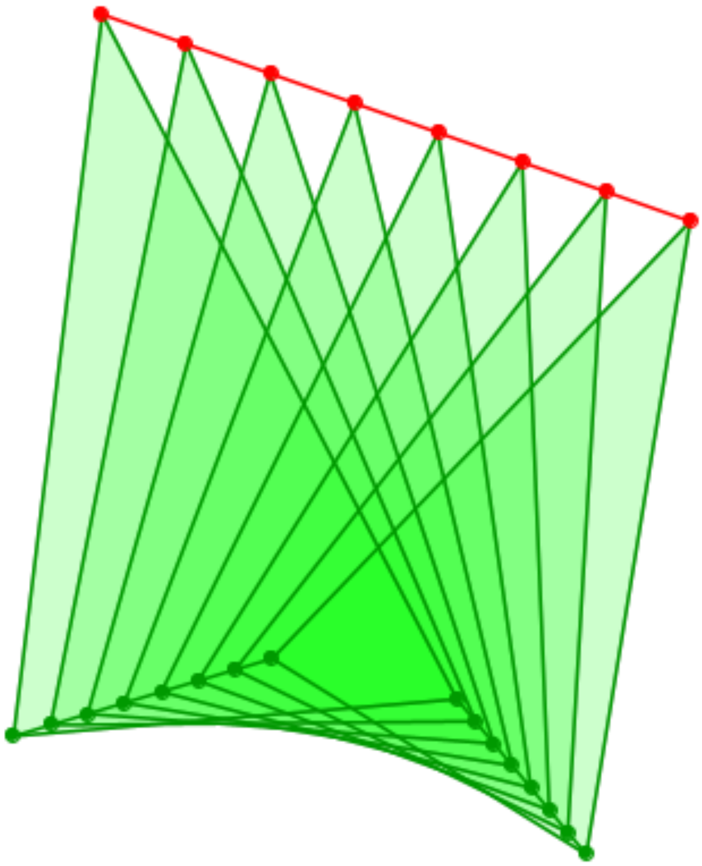

Abb. 5: Allgemeine ähnliche Dreiecke

Analog verfährt man für Polygone mit mehr als drei Ecken.